Algèbre de Boole et fonctions booléennes

- Introduction
- Boole : mathématicien anglais du 19ème siècle qui s'intéresse aux propositions logiques
  - Proposition Vraie/Fausse
  - Et, Ou, complément
- Ordinateur : manipule des 0 et 1 (2 tensions électriques 0v et 5v)
  - 0 : faux
  - 1: vrai
  - L'étude des fonctions booléennes permet de construire des circuits électroniques

Définition d'un Algèbre de Boole

- Soit un ensemble A possédant 2 éléments particuliers notés 0 et 1
- A muni des opérations . (produit), + (somme) et $\overline{}$ (complémentation) est un algèbre de Boole si et seulement si il respecte les axiomes suivants :
  - A1 : . et + commutatives et associatives
    - ***a.b= b.a**, **a+b= b+a**, **a.(b.c)= (a.b).c**, **a+(b+c)= (a+b)+c***
  - A2 : 0 est l'élément neutre pour +, 1 est l'élément neutre pour .
    - pour tout ***a*** élément de A : ***0+a= a, 1.a= a***
  - A3 : . est distributive par rapport à + et inversement
    - ***a.(b+c)= (a.b)+(a.c) , a+(b.c)= (a+b).(a+c)***
  - A4 : pour tout ***a*** élément de A : $\boldsymbol{a+\overline{a}=1}$ *et* $\boldsymbol{a.\overline{a}=0}$

Un algèbre de Boole

- Il existe de nombreux algèbres de Boole
  - Par exemple l'ensemble des parties d'un ensemble non vide A est un algèbre de Boole
- L'exemple le plus simple d'algèbre de Boole est celui pour lequel A= {0, 1}.
- C'est celui que l'on va étudier
- On notera B= {0,1}

Notations

- Le . est prioritaire sur le +.
  - Exemple: (a.b)+ c = a.b + c
- Le complément est prioritaire sur le + et le .
  - Exemple $(\overline{a.b}) = \overline{a.b}$
- On omet souvent les .
  - Exemple : a.b.c = a b c

Propriétés et Théorèmes

- **Dualité :**
  - Si (A, 0, 1, +, ., -) est un algèbre de Boole alors (A, 1, 0, ., +,-) est aussi un algèbre de Boole
  - Tous les axiomes (ou propriétés) sont toujours vrais si on remplace les + par des . et inversement , et les 0 par des 1 et inversement
  - Exemple:
    - a.1= a ; dualité: a+ 0= a

Propriétés, règles de simplification

- Montrons que **a= a.a** et (par dualité a+a= a)

$a = 1.a$	(1 élément neutre pour .)
$= (\overline{a} + a).a$	($\overline{a}$ + a=1)
$= \overline{a}.\,a + a.\,a$	(distributivité)
$= 0 + a.a$	($a.\overline{a}$= 0)
$= a.a$	(0 élément neutre pour +)

Propriétés, règles de simplification

- Montrons que si a+b= 1 et a.b= 0 alors a= $\overline{b}$ et b= $\overline{a}$

$a= a+0$	(élément neutre)
$= a+b.\overline{b}$	($b.\overline{b}$= 0)
$= (a+b)(a+\overline{b})$	(distributivité)
$= 1.(a+\overline{b})$	(a+b= 1 ici)
$=(b+\overline{b})(a+\overline{b})$	(1= b+$\overline{b}$)
$= b.a+ b.\overline{b} + \overline{b}.a + \overline{b}.\,\overline{b}$	(distributivité)
$= 0 + \overline{b}\,(a+b)+\overline{b}.\overline{b}$	(a.b= 0 ici; distributivité)
$= \overline{b}.1+ \overline{b}$	(a+b= 1 ici; élément neutre et a.a= a)
$= \overline{b}+ \overline{b}= \overline{b}$	(a+ a= a)

On peut montrer de la même façon que b= $\overline{a}$

On en déduit que a= $\overline{\overline{a}}$

On en déduit aussi que $\overline{0}$=1 et $\overline{1}$= 0 car 1+0=1 et 1.0= 0

Propriétés, règles de simplification

- **$\overline{\overline{a}}$= a duale: $\overline{\overline{a}}$= a**
- **a+1= 1 duale: a.0= 0**
- **a+a= a duale: a.a= a**
- **a + a.b = a duale: a.(a+b)= a**
- **a.b+ $\overline{a}$.b = b duale: (a+b).($\overline{a}$+b) = b**
- **a.b + $\overline{a}$ = b + $\overline{a}$ duale: (a+b).$\overline{a}$ = b.$\overline{a}$**
- **a.b + $\overline{a}$.c + b.c = a.b + $\overline{a}$.c**
- **A démontrer à partir des axiomes**

Règles de De Morgan

- $\overline{(a+b)} = \overline{a}\,.\,\overline{b}$
- $\overline{(a.b)} = \overline{a} + \overline{b}$

D'après la propriété: si a+b= 1 et a.b= 0 alors a= $\overline{b}$ et b= $\overline{a}$

Il suffit de montrer que $\overline{a}.\overline{b} + (a+b) = 1$ et $\overline{a}.\overline{b}.(a+b) = 0$

$\overline{a}.\overline{b} + (a+b) = (\overline{a} + a + b)(\overline{b} + a + b) = (1+b)(1+a) = 1$

$\overline{a}.\overline{b}.(a+b) = \overline{a}.\overline{b}.a + \overline{a}.\overline{b}.b = 0.a + 0.b = 0$

Idem pour la deuxième règle

- On peut aussi démontrer les règles de De Morgan en essayant tous les cas pour a et b

On a montré que $0=\overline{1}$; $1=\overline{0}$; a+1= 1 ; a.0= 0

et on a d'après les axiomes 0+0 = 0 et 1.1= 1

d'où

a	b	a+b	$\overline{a+b}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a}.\overline{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Fonctions booléennes

•Définition :

-On appelle fonction booléenne à n variables une application de B^n dans B :

- f : $B^n \rightarrow B$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

•Exemple à 2 variables :

x_1, x_2	$f(x_1,x_2)$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

Représentation des fonctions booléennes

- **Table de vérité**
  - Tableau: valeurs de la fonction pour chaque combinaison des valeurs des n variables
  - 2^n lignes
- **Expressions algébriques**
  - à partir des noms des variables et des opérateurs de l'algèbre de Boole
    - Exemple : $f(x_1,x_2) = x_1.\overline{x_2} + \overline{x_1}.(x_1 + x_2)$
  - Une fonction : une infinité d'expressions algébriques
  - Simplification des fonctions grâce aux règles de l'algèbre
    - Exemple : $f = ab + \overline{a}\,b\,c + \overline{c} + \overline{b} = ab + \overline{a}\,b + \overline{c} + \overline{b} = 1 + \overline{c} = 1$

Vocabulaire

- Monôme : produit de variables sous forme normale ou complémentée
  - -Exemple: $x_1.x_2.\overline{x_3}.x_4$
- Monal : somme de variables sous forme normale ou complémentée
  - -Exemple: $\overline{x_1}+x_2+x_3+\overline{x_4}$
- Forme polynomiale : somme de monômes
- Monômes canoniques : toutes les variables de la fonction apparaissent (complémentée ou non)
- Forme normal conjonctive: somme de monômes canoniques
- Forme normal disjonctive: produit de monaux canoniques

Expression algébrique à partir de la table de vérité

- **Théorème de Shannon :**

$f(x_1,x_2, \dots,x_n)= \overline{x_i} . f(x_1,x_2, \dots, 0, \dots, x_n) + x_i . f(x_1,x_2, \dots,1, \dots, x_n)$

- Exemple avec n=2 :
  - $f(x_1,x_2)= \overline{x_1} . f(0,x_2) + x_1 . f(1,x_2)$
  - $f(x_1,x_2)= \overline{x_1} . (\overline{x_2} . f(0,0)+ x_2 . f(0,1))+ x_1 . (\overline{x_2} . f(1,0)+ x_2 . f(1,1))$
  - $f(x_1,x_2)= \overline{x_1} .\overline{x_2} . f(0,0)+ \overline{x_1}.x_2 . f(0,1) + x_1.\overline{x_2} . f(1,0)+ x_1.x_2 . f(1,1)$
- **Passage évident de la table de vérité à une expression algébrique sous forme de somme de produits (forme normale)**

Exemple sur une table de vérité

- x_1, x_2 $f(x_1, x_2)$
- 0 0 $f(0,0)= 1$
- 0 1 $f(0,1)= 0$
- 1 0 $f(1,0)= 1$
- 1 1 $f(1,1)= 1$

- $f(x_1,x_2)= \overline{x_1} .\overline{x_2} . f(0,0)+ \overline{x_1}.x_2 . f(0,1) + x_1.\overline{x_2} . f(1,0)+ x_1.x_2 . f(1,1)$
- $f(x_1,x_2)= \overline{x_1} .\overline{x_2} . 1 + \overline{x_1}.x_2 . 0 + x_1.\overline{x_2} . 1+ x_1.x_2 . 1$
- $f(x_1,x_2)= \overline{x_1} .\overline{x_2} + x_1.\overline{x_2} + x_1.x_2 = \overline{x_1} .\overline{x_2} + x_1.\overline{x_2} + x_1.\overline{x_2} + x_1.x_2$
- $f(x_1,x_2)= \qquad \overline{x_2} \quad + \quad x_1$

Méthode

- On regarde les lignes où la fonction vaut 1
- On écrit les monômes avec la variable sous forme normale si elle vaut 1, complémentée si elle vaut 0
- Possibilité d'obtenir la forme normale disjonctive (par dualité)
  - On regarde les lignes où la fonction vaut 0 et on écrit un produit de somme canonique en prenant la variable sous forme normale si elle vaut 0 et complémentée si elle vaut 1
- Exemple forme normale disjonctive:

x_1, x_2 $f(x_1, x_2)$

0 0 $f(0,0)= 1$

0 1 $f(0,1)= 0$ $\qquad f(x_1, x_2)= (x_1 + \overline{x_2}).(\overline{x_1} + \overline{x_2})$

1 0 $f(1,0)= 1$ $\qquad = \overline{x_1}. \overline{x_2} + x_1.\overline{x_2}$

1 1 $f(1,1)= 0$

Simplification

- Pour concevoir un circuit , on peut partir d'une expression algébrique
- Forme simplifiée permet d'obtenir le circuit le plus petit ou le plus rapide
- Formes et critères de simplification des expressions algébriques dépendent de la technologie utilisée, on comprendra plus tard
- Exemple: Forme polynomiale
  - Critère de simplification:
    - »Minimum de monômes et (en deuxième lieu) minimum de variables par monômes

Exemple de fonctions

- x_1, x_2 $f(x_1, x_2)$
- 0 0 $f(0,0)= 0$
- 0 1 $f(0,1)= 1$
- 1 0 $f(1,0)= 1$
- 1 1 $f(1,1)= 1$

- $f(x_1,x_2)= \overline{x_1}.x_2 + x_1.\overline{x_2} + x_1.x_2 = \overline{x_1}.x_2 + x_1.x_2 + x_1.\overline{x_2} + x_1.x_2$
- $f(x_1,x_2) = x_2 + x_1$
- Fonction Ou (Or)

Exemple de fonctions

- x_1, x_2 $f(x_1, x_2)$
- 0 0 $f(0,0)= 1$
- 0 1 $f(0,1)= 0$
- 1 0 $f(1,0)= 0$
- 1 1 $f(1,1)= 0$

- $f(x_1,x_2)= \overline{x_1}.\overline{x_2}$
- $f(x_1,x_2) = \overline{x_2 + x_1}$ par De Morgan
- Fonction Non-Ou (Nor)

Exemple de fonctions

- x_1, x_2 $f(x_1, x_2)$
- 0 0 $f(0,0)= 0$
- 0 1 $f(0,1)= 0$
- 1 0 $f(1,0)= 0$
- 1 1 $f(1,1)= 1$

- $f(x_1,x_2)= x_1.x_2$
- Fonction Et (And)

Exemple de fonctions

- x_1, x_2 $f(x_1, x_2)$
- 0 0 $f(0,0)= 1$
- 0 1 $f(0,1)= 1$
- 1 0 $f(1,0)= 1$
- 1 1 $f(1,1)= 0$

- $f(x_1,x_2)= \overline{x_1} + \overline{x_2} = \overline{x_1.x_2}$ par De Morgan
- Fonction Non Et (Nand)

Quelques fonctions particulières

- Fonctions à 1 variable (4):
  - $f(x)= \overline{x}$: complément
  - $f(x)= x$
  - $f(x) = 1$ tautologie (toujours vrai)
  - $f(x) = 0$ (toujours faux)
- Fonctions à 2 variables (16):
  - $f(x,y) =x.y$: Et and
  - $f(x,y) =x+y$: Ou or
  - $f(x,y) =\overline{x}\ y+ x\ \overline{y}$: Ou exclusif, appelé aussi XOR, noté $\oplus$
  - $f(x,y) = x\ y+\overline{x}\ \overline{y}$: Equivalence logique, coïncidence, noté $\odot$
  - $f(x,y) = \overline{(x.y)}$: non-et , nand
  - $f(x,y) = \overline{(x+y)}$: non-ou , nor
  - Même nom à n variables
- 2 puissance (2 puissance n) fonctions à n variables

Tableau de Karnaugh

- Outil “manuel” de simplification des fonctions booléennes (1954)
- **Principe**
  - Table de vérité sous forme de tableau
  - Principe du regroupement de 2^n cases adjacentes
  - Exemple f(a,b,c)

$(\overline{a}\ \overline{b} + a\ \overline{b})\ \overline{c} = \overline{b}\ \overline{c}$

c \ ab	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1

$(a\ b + a\ \overline{b})\ c = a\ c$

- Attention à l’ordre des colonnes et des lignes, une seule variable doit changer d’une ligne (colonne) à l’autre

Monômes et points d’une fonction booléenne

- Un point d’une fonction: un monôme canonique: une case à 1 du tableau de Karnaugh
- On dit qu’un monôme “recouvre” des points de la fonction
- Un monôme à k variables (parmi n) couvre 2^{n-k} point

monôme canonique: $a.\overline{b}.\overline{c}$

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	1

a.c recouvre deux points de la fonction

Principe de la minimisation d'une forme polynômiale

• **Définitions :**

- Relation d'ordre sur les expressions algébriques booléennes :
  - $f \leq g$ si et seulement si $f.g = f$
- Exemple : $a.c < a$ car $a.c.a = a.c$

• **Monôme** d'une fonction f :

- C'est un monôme m tel que $m \leq f$

Principe de la minimisation d'une forme polynomiale

• **Monôme premier** d'une fonction f :

- $m \leq f$ et il n'existe pas de monôme m' tel que $m' \leq f$ et $m' \leq m$

• Monôme premier: "plus gros regroupement" de 2^k points sur le tableau de Karnaugh

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	1

a

a c

Minimisation

•**Base d'une fonction**

-Somme de monômes premiers tel que tous les points de f sont couverts par au moins un de ces monômes

•**Base complète :** Tous les monômes premiers de la fonction

•**Base irrédondante d'une fonction** :

-Si on enlève un de ses monômes ce n'est plus une base de f

-Il peut y avoir plusieurs bases irrédondantes

•**But de la minimisation:**

-Critère : nombre minimal de monômes et de variables par monômes

-Trouver une base irrédondante possédant le moins possible de monôme

-Problème NP complet : il faut trouver toutes les bases irrédondantes pour trouver la (ou les) minimales

Algorithme de minimisation

- Trouver la base complète
- Garder les monômes essentiels (seul à couvrir au moins un point)
- Eliminer les monômes inutiles (tous les points qu'ils couvrent sont couverts par des essentiels
- Essayer tous les cas pour couvrir les points non couverts par les essentiels
- Heuristique : prendre d'abord ceux qui couvrent le plus de points non encore couverts par les monômes déjà choisis

Exemple sur tableau de Karnaugh

•Base complète

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	0
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

Monôme essentiels

• Une base irrédondante non minimale (5)

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	0
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

Une base irrédondante minimale (4)

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	0
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

Tableau de Karnaugh à 5 variables

On peut l'imaginer comme deux tableaux à 4 variables ***superposés***

$a.\overline{b}$

$\overline{b}.\overline{d}.\overline{e}$

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	1

e=0

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	1	0	1
11	0	1	0	1
10	0	0	0	1

e=1

$\overline{a}.b.d.e$

Fonctions phi-booléennes

•**Définition**:

- On appelle fonction phi-booléenne à n variables une application de B^n dans $\{0,1,\Phi\}$:
  - $f : B^n \rightarrow \{0, 1, \Phi\}$
  - $(x_1,x_2, \ldots,x_n) \rightarrow f(x_1,x_2, \ldots,x_n)$

•**Remarque :** phi : 0 superposé à 1 : Φ

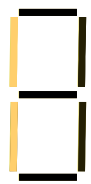
•Les points à Φ de la fonction représentent des cas « non-existants »

•Les phis n'existent pas dans les circuits, seulement des 1 ou des 0 (réalisation de fonctions booléennes)

•On veut trouver une expression algébrique minimale d'une fonction booléenne égale à la fonction phi-booléenne où l'on a remplacé les phi par des 1 ou des 0

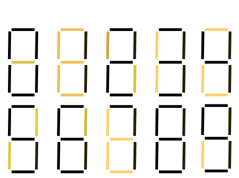
Exemple: un afficheur 7 segments

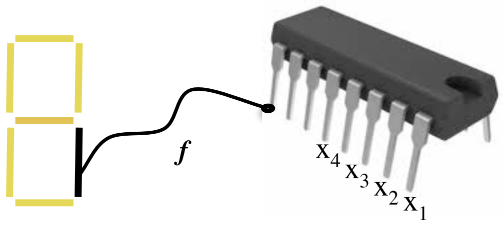
•On veut afficher un chiffre décimal sur 7 segments lumineux le représentant (par exemple sur une montre)



Exemple: un afficheur 7 segments

- L'allumage de chaque segment peut être «commandé» par un circuit qui a pour entrées le chiffre codé en base 2 sur les broches x_4, x_3, x_2, x_1
- Le circuit «réalise» 7 fonctions booléennes dont les variables sont les entrées x_4, x_3, x_2, x_1
- Le segment s'allume quand la fonction f vaut 1
- Par exemple le segment du milieu doit s'allumer pour les chiffres 2, 3, 4, 5, 6, 8 et 9





Réalisation de l'afficheur 7 segments par l'étude de fonctions phi-booléennes

- Les valeurs des variables représentant les entiers de 10 à 15 n'arriveront jamais à l'entrée du circuit qui va «calculer» ces fonctions booléennes
- On peut donc utiliser une fonction phi-booléenne, elle a la valeur phi pour les 6 cas suivants:

x_4	x_3	x_2	x_1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Tableau de Karnaugh phi booléenne du segment du milieu

On suppose que l'entier en base 2 s'écrit x_4, x_3, x_2, x_1

x2x1 \ x4x3	00	01	11	10
00	0	1	Φ	1
01	0	1	Φ	1
11	1	0	Φ	Φ
10	1	1	Φ	Φ

Bornes d'une fonction phi-booléenne

- **Borne inférieure d'une fonction phi-booléenne f** :
  - la fonction booléenne où tous les phi ont été remplacés par des 0
- **Borne supérieure d'une fonction phi-booléenne f** :
  - la fonction booléenne où tous les phi de f ont été remplacés par des 1
- **Minimisation d'une fonction phi-booléenne :**
  - But obtenir une fonction booléenne en remplaçant les phi au choix par 0 ou 1

c \ ab	00	01	11	10
0	1	Φ	0	1
1	0	Φ	0	1

Fonction phi booléenne f

c \ ab	00	01	11	10
0	1	**0**	0	1
1	0	**0**	0	1

Borne inférieure de f

c \ ab	00	01	11	10
0	1	**1**	0	1
1	0	**1**	0	1

Borne supérieure de f

Minimisation d'une fonction phi-booléenne

•But : obtenir une fonction booléenne en remplaçant les phi au choix par 0 ou par 1

•Les monômes premiers d'une fonction phi-booléenne sont ceux de sa borne supérieure

•Une base d'une fonction phi-booléenne est une somme de monômes premiers (de la borne supérieure) qui couvrent tous les points de la borne inférieure.

•Ainsi certains phis sont remplacés par des 0 et d'autres par des 1 afin d'obtenir un minimum de monômes

Exemple de minimisation phi-booléenne

c \ ab	00	01	11	10
0	1	Φ	0	1
1	0	Φ	0	1

- **On détermine les monômes premiers de la borne supérieure:**

c \ ab	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1

- **Parmi ces monômes premiers on en choisit un nombre minimum afin de recouvrir tous les points de la borne inférieure:**

c \ ab	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1

c \ ab	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1

Deux bases irrédondantes

Exemple de minimisation phi-booléenne

- Fonction phi-booléenne-

cd \ ab	00	01	11	10
00	Φ	Φ	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	Φ
10	0	0	1	1

Borne supérieure

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

Borne inférieure

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	1

cd \ ab	00	01	11	10
00	Φ → 0	Φ → 0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	Φ → 1
10	0	0	1	1

Autre exemple de minimisation phi booléenne

x2x1 \ x4x3	00	01	11	10
00	0	1	Φ	1
01	0	1	Φ	1
11	1	0	Φ	Φ
10	1	1	Φ	Φ