Bijection entre les topologies d'Alexandroff et les préordres

Michel Lévy

21 janvier 2015

Définition 1 (Préordre)

Un préordre est un couple (E,R) où R est une relation réflexive et transitive sur l'ensemble E.

Soient $e, f \in E$ tel que eRf : f est un successeur de e.

*Soit A un sous-ensemble de E. L'*origine *de A, relativement au préordre, est l'ensemble des élements de E dont tous les successeurs sont éléments de A. L'origine de A est notée $o_{(E,R)}(A)$, et souvent $o(A)$ quand le préordre est implicite.*

Lemme 2 (Propriété de l'origine d'un ensemble)

Soit (E,R) un préordre. L'origine vérifie les propriétés suivantes :

1. $o(\emptyset) = \emptyset$
2. $o(E) = E$
3. *Pour tous $A,B \subset E$, si $A \subset B$ alors $o(A) \subset o(B)$*
4. *Pour tout $A \subset E$, $o(A) \subset A$*
5. *Pour tout $A \subset E$, $o(o(A)) = o(A)$*

Preuve : Les propriétés 1, 2, 3 sont des conséquences immédiates de la définition de l'origine.

Soit $a \in o(A)$. Tout successeur de a est dans A. Puisque R est reflexive, a est son propre successeur, donc $a \in A$, ce qui prouve 4.

Prouvons la propriété 5. D'après la propriété précédente, $o(o(A)) \subset o(A)$. Il suffit donc de prouver que $o(A) \subset o(o(A))$.

Soit $a \in o(A)$. Tous les successeurs de a sont éléments de A. Soit b un successeur de a. Tout successeur de b est, par transitivité de R, aussi un successeur de a donc un élément de A. Par suite $b \in o(A)$. Donc tous les successeurs de a sont dans $o(A)$. Et par conséquent $a \in o(o(A))$

$\square$

Définition 3 (Topologie)

Une topologie est un couple (E,T) où T est un ensemble de sous-ensembles de E, contenant E et $\emptyset$, tel que l'intersection de deux éléments de T est un élément de T et l'union d'éléments de T est un élément de T. Un élément de T est un ouvert *de la topologie.*

Une topologie d'Alexandroff[1] *une topologie* (E,T) *où l'intersection d'éléments de* T *est un élément de* T.

Définition 4 (Topologie associée à un préordre) *Soit* (E,R) *un préordre. Soit* T *l'ensemble des* $A \subset E$ *tels que* $o(A) = A$. (E,T) *est la topologie d'Alexandroff associée au préordre.*

Preuve : D'après les propriétés de o, l'ensemble vide et E sont des éléments de T.

Montrons que l'union d'un ensemble d'éléments de T est aussi un élément de T. Soit S un sous-ensemble de T. Montrons que $o(\bigcup S) = \bigcup S$. D'après les propriétés de o, on sait que $o(\bigcup S) \subset \bigcup S$. Il suffit donc de montrer l'inclusion inverse. Soit $a \in \bigcup S$. Il existe $A \in S$ tel que $a \in A$. Puisque A est élément de T, $o(A) = A$, donc tous les successeurs de a sont dans A, donc dans $\bigcup S$. Par suite $a \in o(\bigcup S)$.

Montrons que l'intersection d'un ensemble d'éléments de T est aussi un élément de T. Soit S un sous-ensemble de T. Montrons que $o(\bigcap S) = \bigcap S$. Comme ci-dessus, il suffit de montrer que $\bigcap S \subset o(\bigcap S)$. Soit $a \in \bigcap S$. Pour tout $A \in S$, $a \in A$. Puisque S est sous-ensemble de T, pour tout $A \in S$, $a \in o(A)$. Donc pour tout $A \in S$, pour tout b successeur de a, on a $b \in A$. Par suite pour tout b successeur de a, pour tout $A \in S$, $b \in A$. Par conséquent tous les successeurs de a sont éléments de $\bigcap S$, donc $a \in o(\bigcap S)$.

Par suite, (E,T) est une topologie d'Alexandroff.

□

Définition 5 (Préordre associé à une topologie) *Soit* (E,T) *une topologie. Soit* R *la relation suivante sur* E *:* eRf *si et seulement si* $\forall A \in T (e \in A \Rightarrow f \in A)$. *Par définition de* R, *il est évident que* (E,R) *est un préordre, le préordre* associé *à la topologie.*

Théorème 6

Soit (E,T) *une topologie. Soit* (E,R) *le préordre associée à cette topologie.*

Soit (E,T') *la topologie associée au préordre* (E,R). *On rappelle que* T' *est l'ensemble des* $A \subset E$ *tels que* $o(A) = A$.

$T \subset T'$, *comme on dit usuellement* (E,T') *est une topologie plus fine que* (E,T).

Si T *est une topologie d'Alexandroff,* $T = T'$.

Preuve : Montrons que $T \subset T'$.

Soit $A \in T$ et $a \in A$. Soit b tel que aRb, un successeur de a. Puisque (E,R) est le préordre associé à la topologie (E,T), $\forall B \in T (a \in B \Rightarrow b \in B)$. Puisque $A \in T$ et $a \in A$, nous avons $b \in A$. Donc, puisque tous les successeurs de a sont dans A, $a \in o(A)$. Par conséquent $A \subset o(A)$. Puisque, d'après les propriétés de o (cf 2, $o(A) \subset A$, on a $A = o(A)$, donc $A \in T'$.

Supposons que (E,T) est une topologie d'Alexandroff, autrement dit l'intersection d'éléments de T est un élément de T. Montrons que $T' \subset T$.

Soit $A \in T'$. Puisque $o(A) = A$, si $a \in A$ et b successeur de a alors $b \in A$. Autrement dit, par définition de R : $a \in A \wedge \forall B \in T (a \in B \Rightarrow b \in B) \Rightarrow b \in A$.

Puisque (E,T) est une topologie d'Alexandroff, pour $a \in A$, le plus petit ouvert contenant a existe, car c'est l'intersection des ouverts (autrement dit, des éléments de T) contenant a. Notons $ppo(a)$ cet ouvert.

1. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Topologie_d'Alexandroff)`

Soit $D = \bigcup\{ppo(a) \mid a \in A\}$. Puisque D est une union d'ouverts, c'est un ouvert, c'est-à-dire un élément de T. Par définition de D, $A \subset D$.

Montrons que $D \subset A$. Soit $b \in D$. Il existe $a \in A$ tel que $b \in ppo(A)$. La condition $b \in ppo(a)$ s'écrit encore $\forall B \in T(a \in B \Rightarrow b \in B)$.

Puisque A vérifie $a \in A \wedge \forall B \in T(a \in B \Rightarrow b \in B) \Rightarrow b \in A$, il en résulte que $b \in A$.

Par suite $A = D$ donc $A \in T$.

□

Théorème 7 *La correspondance entre une topologie d'Alexandroff (E,T) et son préordre associé (E,R) où eRf si et seulement si $\forall A \in T(e \in A \Rightarrow f \in B)$ est une bijection.*

Preuve : D'après le théorème 6, cette correspondance est une injection. Puisque la topologie associée à un préordre, est une topologie d'Alexandroff, cette correspondance est surjective. □