# Sens de Kripke et de Tarski de la logique intuitionniste

Michel Lévy

16 janvier 2015

La logique intuitionniste (propositionnelle) est présentée avec deux sémantiques en apparence très différente : la sémantique de Kripke et celle de Tarski. Nous donnons la définition de ces deux sémantiques, puis nous montrons comment transformer un modèle de Kripke en un modèle de Tarski et réciproquement.

L'ensemble des formules de la logique intuitionniste est l'ensemble construit à partir d'un ensemble de variables (noté $Var$) et des connectives $\wedge, \vee, \Rightarrow, \perp$. Une variable est une suite de minuscules avec ou sans indice. Les majuscules dénotent des formules. La négation et l'équivalence sont considérées comme des abréviations

1. $\neg A = A \Rightarrow \perp$
2. $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

$Formule(Var)$ est l'ensemble des formules dont les variables sont éléments de $Var$. Dans la suite toutes les formules sont implicitement éléments de cet ensemble et les variables sont éléments de $Var$.

## 1 Définition des deux sémantiques

### 1.1 Sémantique de Kripke

**Définition 1.1 (Préordre - Interprétation de Kripke)**

*Un préordre est un couple $(E,R)$ où $R$ est une relation réflexive et transitive sur l'ensemble $E$.*

*Soient $e, f \in E$ tel que $eRf$. L'élément $f$ est un successeur de $e$.*

*Soit $A$ un sous-ensemble de $E$. L'*origine *de $A$, relativement au préordre, est l'ensemble des élements de $E$ dont tous les successeurs sont éléments de $A$. L'origine de $A$ est notée $o_{(E,R)}(A)$, et souvent $o(A)$ quand le préordre est implicite.*

*Une interprétation* de Kripke *est un triplet $(E,R,v)$ où $(E,R)$ est un préordre et $v : Var \mapsto 2^E$ est une application qui vérifie la propriété suivante : pour tout $x \in Var$, si $e \in v(x)$ et $e \; R \; f$ alors $f \in v(x)$.*

**Définition 1.2 (Valeur de Kripke d'une formule)**

*Soit $I = (E,R,v)$ une interprétation de Kripke. On étend l'application $v$ en une application $v_K^I : Formule(Var) \mapsto 2^E$ de la façon suivante. Soient $x$ une variable et $A,B$ deux formules :*

1. $v_K^I(x) = v(x)$
2. $v_k^I(\perp) = \emptyset$
3. $v_K^I(A \vee B) = v_K^I(A) \cup v_K^I(B)$
4. $v_K^I(A \wedge B) = v_K^I(A) \cap v_K^I(B)$
5. $v_K^I(A \Rightarrow B) = o_{(E,R)}(\overline{v_K^I(A)} \cup v_K^I(B)\}$

**Définition 1.3 (Formule Kripke-valide)**
*La formule A est Kripke-valide si et seulement si pour tout interprétation de Kripke $I = (E,R,v)$, $v_K^I(A) = E$.*

Dans le document `http://teachinglogic.liglab.fr/INT1/S4Lint.pdf`, on trouve une autre présentation de la sémantique de Kripke et nous expliquons ici comment correspondent ces deux présentations.

**Définition 1.4 (Assignation)**
*Soit $I = (E,R,v)$ une interprétation de Kripke. Une assignation est un couple $Ie$ composé de l'interprétation $I$ et d'un élement $e \in E$ de cette interprétation. Une assignation permet de donner une valeur de vérité à une formule.*

Dans le document cité, on trouvera une définition de la phrase $Ie \models A$, l'assignation $Ie$ est *rend vraie* la formule $A$. Il est clair que ces deux définitions de la sémantique de Kripke sont presque identiques, car elles vérifient : $\{e \in E \mid Ie \models A\} = v_K^I(A)$.

Autrement dit, relativement à une interprétation, la valeur d'une formule est l'ensemble des éléments rendant vraie la formule.

Une formule est Kripke-valide si et seulement si toute assignation rend vraie la formule.

## 1.2 Sémantique de Tarski

**Définition 1.5 (Topologie d'Alexandroff - Interprétation de Tarski)**
*Une topologie est un couple $(E,T)$ où $T$ est un ensemble de sous-ensembles de $E$, contenant $E$ et $\emptyset$, tel que l'intersection de deux éléments de $T$ est un élément de $T$ et l'union d'éléments de $T$ est un élément de $T$. Un élément de $T$ est un* ouvert *de la topologie.*

*Soit A un sous-ensemble de E. L'intérieur de A, relativement à la topologie, est le plus grand ouvert inclus dans A. L'intérieur de A est noté $i_{(E,T)}(A)$ et souvent $i(A)$ quand la topologie est implicite.*

*Une topologie d'Alexandroff (cf wikipédia `https://fr.wikipedia.org/wiki/Topologie_d'Alexandroff`) est une topologie $(E,T)$ où l'intersection d'éléments de $T$ est un élément de $T$.*

*Une interprétation* de Tarski *est un triplet $(E,T,v)$ où $(E,T)$ est une topologie d'Alexandroff et $v : Var \mapsto 2^E$ est une application qui vérifie la propriété suivante : pour tout $x \in Var$, $v(x)$ est un ouvert.*

**Définition 1.6 (Valeur de Tarski d'une formule)**
*Soit $I = (E, T, v)$ une interprétation de Tarski. On étend l'application $v$ en une application $v_T^I : Formule(Var) \mapsto 2^E$ de la façon suivante. Soient $x$ une variable et $A, B$ deux formules :*

1. $v_T^I(x) = v(x)$
2. $v_T^I(\perp) = \emptyset$
3. $v_T^I(A \vee B) = v_T^I(A) \cup v_T^I(B)$
4. $v_T^I(A \wedge B) = v_T^I(A) \cap v_T^I(B)$
5. $v_T^I(A \Rightarrow B) = i_{(E,T)}(\overline{v_T^I(A)} \cup v_T^I(B))$

Il est évident (par récurrence sur les formules), que la valeur d'une formule est un ouvert.

**Définition 1.7 (Formule Tarski-valide)** *Une formule $A$ est Tarski-valide si et seulement si pour tout interprétation $I = (E, T, v)$ de Tarski, $v_T^I(A) = E$.*

# 2 Relation entre les sémantiques de Kripke et de Tarski

## 2.1 Préordre et espace topologique associé

**Lemme 2.1 (Propriété de l'origine d'un ensemble)**
*Soit $(E, R)$ un préordre. Soit $A$ un sous-ensemble de $E$, on rappelle que l'origine de $A$, notée $o(A)$ est l'ensemble des éléments de $E$ dont tous les successeurs sont éléments de $A$. L'origine vérifie les propriétés suivantes :*

1. $o(\emptyset) = \emptyset$
2. $o(E) = E$
3. *Pour tous* $A, B \subset E$, *si* $A \subset B$ *alors* $o(A) \subset o(B)$
4. *Pour tout* $A \subset E$, $o(A) \subset A$
5. *Pour tout* $A \subset E$, $o(o(A)) = o(A)$

Preuve : Les propriétés 1, 2, 3 sont des conséquences immédiates de la définition de l'origine.

Soit $a \in o(A)$. Tout successeur de $a$ est dans $A$. Puisque $R$ est reflexive, $a$ est son propre successeur, donc $a \in A$, ce qui prouve 4.

Prouvons la propriété 5. D'après la propriété précédente, $o(o(A)) \subset o(A)$. Il suffit donc de prouver que $o(A) \subset o(o(A))$.

Soit $a \in o(A)$. Tous les successeurs de $a$ sont éléments de $A$. Soit $b$ un successeur de $a$. Tout successeur de $b$ est, par transitivité de $R$, aussi un successeur de $a$ donc un élément de $A$. Par suite $b \in o(A)$. Donc tous les successeurs de $a$ sont dans $o(A)$. Et par conséquent $a \in o(o(A))$

□

**Lemme 2.2 (Préordre et topologie associée)**

*Soit $(E,R)$ un préordre.*

*Soit $T$ l'ensemble des sous-ensembles $A \subset E$ tel que $o(A) = A$. $(E,T)$ est la topologie d'Alexandroff associée au préordre.*

*La topologie* associée au préordre *vérifie que pour tout $A \subset E$, $o(A) = i(A)$.*

Preuve : D'après les propriétés de $o$, l'ensemble vide et $E$ sont des éléments de $T$.

Montrons que l'union d'un ensemble d'éléments de $T$ est aussi un élément de $T$. Soit $S$ un sous-ensemble de $T$. Montrons que $o(\bigcup S) = \bigcup S$. D'après les propriétés de $o$, on sait que $o(\bigcup S) \subset \bigcup S$. Il suffit donc de montrer l'inclusion inverse. Soit $a \in \bigcup S$. Il existe $A \in S$ tel que $a \in A$. Puisque $A$ est élément de $T$, $o(A) = A$, donc tous les successeurs de $a$ sont dans $A$, donc dans $\bigcup S$. Par suite $a \in o(\bigcup S)$.

Montrons que l'intersection d'un ensemble d'éléments de $T$ est aussi un élément de $T$. Soit $S$ un sous-ensemble de $T$. Montrons que $o(\bigcap S) = \bigcap S$. Comme ci-dessus, il suffit de montrer que $\bigcap S \subset o(\bigcap S)$. Soit $a \in \bigcap S$. Pour tout $A \in S$, $a \in A$. Puisque $S$ est sous-ensemble de $T$, pour tout $A \in S$, $a \in o(A)$. Donc pour tout $A \in S$, pour tout $b$ successeur de $a$, on a $b \in A$. Par suite pour tout $b$ successeur de $a$, pour tout $A \in S$, $b \in A$. Par conséquent tous les successeurs de $a$ sont éléments de $\bigcap S$, donc $a \in o(\bigcap S)$.

Nous venons de prouver que $(E,T)$ est une topologie d'Alexandroff.

Puisque $(E,T)$ est une topologie, les éléments de $T$ sont appelés des ouverts. Soit $A$ un sous-ensemble de $E$. On rappelle que $o(A)$, l'origine de $A$ est l'ensemble des éléments de $E$ dont tous les successeurs sont dans $A$ et que $i(A)$, l'intérieur de $A$ est le plus grand ouvert inclus dans $A$. Montrons que l'intérieur et l'origine d'un ensemble sont identiques.

D'après les propriétés de $o$, $o(o(A)) = o(A)$ et $o(A) \subset A$, donc $o(A)$ est un ouvert inclus dans $A$. Par suite $o(A) \subset i(A)$.

Supposons que $o(A)$ n'est pas égal à $i(A)$, donc n'est pas le plus grand ouvert inclus dans $A$. Il existerait un ouvert $B$ tel que $o(A) \subset B \subset A$ et $B \neq o(A)$. Puisque $B \subset A$, par monotonie de $o$, $o(B) \subset o(A)$. Puisque $B$ est un ouvert, $o(B) = B$ donc $B \subset o(A)$ et par suite $B = o(A)$. Par suite $o(A) = i(A)$. □

**Lemme 2.3 (De Kripke vers Tarski)**

*Soit $I = (E,R,v)$ une interprétation de Kripke.*

*Soit $(E,T)$ la topologie associée au préordre $(E,R)$ et $J = (E,T,v)$ l'interprétation de Tarski* associée *à $I$. Pour toute formule $A$, $v_K^I(A) = v_T^J(A)$.*

Preuve : Le lemme est prouvé par récurrence sur l'ensemble des formules. Il est la conséquence immédiate de ce que, d'après 2.2, pour tout $A \subset E$, on a $o(A) = i(A)$ où $o(A)$ est l'origine de $A$ pour le préordre $(E,R)$ et $i(A)$ est l'intérieur de $A$ pour la topologie $(E,T)$ *associée* au préordre. □

## 2.2 Espace topologique et préordre associée

**Définition 2.4 (Topologie et préordre associée)**

*Soit $(E,T)$ une topologie. Soit $R$ la relation sur $E$ ainsi définie : soient $e, f \in E$, $eRf$ si et seulement pour tout ouvert $A \in T$, si $e \in A$ alors $f \in A$.*

*D'après cette définition, il est évident R est une relation réflexive et transitive donc que $(E,R)$ est un préordre, le préordre associé à la topologie.*

**Lemme 2.5**

*Soit $(E,T)$ une topologie d'Alexandroff et $(E,R)$ le préordre qui lui est associé. Pour tout A sous-ensemble de E, on a $o(A) = i(A)$.*

Preuve : Soit $(E,T)$ une topologie d'Alexandroff et $(E,R)$ le préordre qui lui est associé.

Soit $(E,T')$ la topologie associée à ce préordre. Nous avons vu dans le lemme 2.2 que $(E,T')$ est une topologie d'Alexandroff et que pour tout $A \subset E$, $o_{(E,R)}(A) = i_{(E,T')}(A)$.

Dans l'article de wikipédia `https://fr.wikipedia.org/wiki/Topologie_d'Alexandroff`, il est indiqué, que si $(E,T)$ est une topologie, alors la topologie $(E,T')$ est plus fine que $(E,T)$, autrement dit $T \subset T'$ et que si $(E,T)$ est une topologie *d'Alexandroff*, alors $T = T'$.

Par suite pour tout $A \subset E$, $o_{(E,R)}(A) = i_{(E,T)}(A)$, autrement dit l'intérieur d'un ensemble est égal à l'origine de l'ensemble pour le préordre associée à la topologie d'Alexandroff. □

**Lemme 2.6 (De Tarski vers Kripke)**

*Soit $I = (E,T,v)$ une interprétation de Tarski.*

*Soit $(E,R)$ le préordre associée à la topologie d'Alexandroff $(E,T)$ et soit $J = (E,R,v)$ l'interprétation de Kripke associée à I. Pour toute formule A, $v_T^I(A) = v_K^I(A)$.*

Preuve : Le lemme est prouvé par récurrence sur l'ensemble des formules. Il est la conséquence immédiate de ce que, d'après 2.5, pour tout $A \subset E$, on a $o(A) = i(A)$, où $i(A)$ est l'intérieur de $A$, et $o(A)$ l'origine de $A$ pour *le préordre associé à la topologie*.
□

**Théorème 2.7** *Une formule est Kripke-valide si et seulement si elle est Tarski-valide.*

Preuve : Montrons qu'une formule Kripke-valide est Tarski-valide.

Supposons au contraire qu'il y a une formule $A$ qui n'est pas Tarski-valide. Il existe une interprétation $I = (E,T,v)$ de Tarski telle que $v_T^I(A) \neq E$. Soit $(E,R)$ le préordre associé à la topologie d'Alexandroff $(E,T)$ et $J = (E,R,v)$ l'interprétation de Kripke. D'après le lemme 2.6, $v_K^J(A) \neq E$. Donc $A$ n'est pas Kripke valide.

Réciproquement toute formule Tarski-valide est Kripke-valide.

Supposons au contraire qu'il y a une formule $A$ qui n'est pas Kripke-valide. Il existe une interprétation $I = (E,R,v)$ de Kripke telle que $v_T^I(A) \neq E$. Soit $(E,T)$ la topologie d'Alexandroff associée au préordre $(E,T)$ et $J = (E,T,v)$ l'interprétation de Tarski. D'après le lemme 2.3, $v_T^J(A) \neq E$. Donc $A$ n'est pas Kripke valide. □