Inf242 : Examen

Michel Lévy

20 juillet 2008

Durée : 2h
Documents autorisés : une feuille RV format A4
Remarque : On peut utiliser indifféremment les notations logiques et booléennes.
Priorité : On rappelle que les quantificateurs et la négation ont la plus grande priorité suivie des priorités dans l'ordre décroissant de la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence.
Barème *indicatif* : noter que l'on peut avoir 20 en résolvant les 7 premiers exercices :

exercice	barème
1	2
2	3
3	2
4	3
5	4
6	2
7	4
8	5

Exercice 1 (Évaluer : 2 points) *On donne trois formules :*
Totale $\forall x \exists y r(x,y)$ *la relation r est totale.*
Irréflexive $\forall x \neg r(x,x)$ *la relation r est irreflexive*
Symétrique $\forall x \forall y (r(x,y) \Rightarrow r(y,x))$ *la relation r est symétrique*
On donne trois interprétations :

1. *I de domaine* $\{0\}$ *avec* $r_I = \{(0,0)\}$
2. *J de domaine* $\{0,1\}$ *avec* $r_J = \{(0,1),(1,0)\}$
3. *K de domaine* $\{0,1,2\}$ *avec* $r_K = \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$

Donner les valeurs des trois formules dans chacune de ces trois interprétations.
Pour trouver ces valeurs, on suggère de dessiner les interprétations.
On devra expliquer (brièvement) comment ces valeurs ont été obtenues. Réponse □

Exercice 2 (Déduction naturelle et résolution : 3 points) *Prouver la validité de la formule suivante :*
$\exists x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x) \Rightarrow \exists x\ (p(x) \wedge q(x))$
par les deux méthodes suivantes :

1. *Preuve en déduction naturelle.*
   On utilisera la disposition du cours et on donnera les justifications de chaque formule déduite.
2. *Preuve par résolution au premier ordre.*
   On donnera la forme clausale de la négation de la formule et la preuve par résolution de la clause vide.

Réponse

□

Exercice 3 (Modèle : 2 points) *Prouver que la «réciproque» de la formule précédente, c'est-à-dire la formule :*
$\exists x\ (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \exists x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x)$
n'est pas valide.
On exige l'emploi de la méthode suivante :

1. *Construction de l'expansion de la* négation *de la formule sur le domaine* $\{0,1\}$.
   On suggère d'abréger p(0) en p0, p(1) en p1 et de faire de même pour q.
2. *Transformation de cette expansion en un ensemble de clauses*
3. *Construction d'un modèle propositionnel de cette négation par application de l'algorithme de Davis et Putnam*
4. *Traduction de ce modèle en modèle du premier ordre*

Ceux, qui n'utiliseront pas la méthode préconisée, mais donneront directement un modèle, n'auront pas le maximum à cet exercice. Réponse □

Exercice 4 (Déduction naturelle et résolution : 3 points) *Prouvez la validité de la formule suivante :*
$\forall x(p(x) \Rightarrow r(x)) \wedge \forall x(q(x) \Rightarrow r(x)) \wedge \exists x(p(x) \vee q(x)) \Rightarrow \exists x\ r(x)$
par les deux méthodes suivantes :

1. *Preuve en déduction naturelle.*
   On utilisera la disposition du cours et on donnera les justifications de chaque formule déduite.
2. *Preuve par résolution au premier ordre.*
   On donnera la forme clausale de la négation de la formule et la preuve par résolution de la clause vide.

Réponse □

Exercice 5 (Unification : 4 points)

Unificateur le plus général

Soient les deux expressions $g(h(x),y)$ *et* $g(h(f(y)),z)$.
L'unificateur $x := f(k(a)), y := k(a), z := k(a)$ *est-il un unificateur le plus général de ces deux expressions ? Si vous répondez non, indiquez* deux *unificateurs plus généraux*

Calcul des unificateurs

1. *Indiquer si les expressions* $f(x, g(h(z),x),y)$ *et* $f(k(z),y,g(u,z))$ *sont unifiables (justifier votre réponse) et si elles le sont, donnez leur unificateur le plus général.*
2. *Indiquer si les expressions* $f(x, g(h(z),x),y)$ *et* $f(k(z),y,g(h(j(u)),x))$ *sont unifiables (justifier votre réponse) et si elles le sont, donner leur unificateur le plus général.*

Réponse □

Exercice 6 (Preuve par résolution : 2 points)
Considérons les 3 clauses suivantes :
(C1) $\neg P(x) \vee R(f(x))$
(C2) $P(f(x)) \vee R(x)$
(C3) $\neg R(x)$
Donner une preuve, par résolution au premier ordre, de la clause vide à partir de ces trois clauses. Réponse □

Exercice 7 (Transformation en forme clausale et preuve : 4 points)
Considérons les 3 formules suivantes :
(H1) $\forall x(u(x) \wedge \neg v(x) \Rightarrow \exists y(s(x,y) \wedge q(y)))$
(H2) $\exists x(p(x) \wedge u(x) \wedge \forall y(s(x,y) \Rightarrow p(y)))$
(H3) $\forall x(p(x) \Rightarrow \neg v(x))$
Montrez, par résolution au premier ordre*, que de ces trois formules, on peut déduire :*
$\exists x(p(x) \wedge q(x))$. Réponse

□

Hors Barème

Les questions ci-dessus sont hors du barème, puisque les exercices 1 à 7 permettent d'obtenir 20 points.

Exercice 8 (Modele : 5 points) *Considérons les trois formules ci-dessus qui indique que la relation $<$ est totale, irréflexive et transitive.*

< *totale* $\forall x \exists y (x < y)$
< *irreflexive* $\forall x \neg (x < x)$
< *transitive* $\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)$

1. *Montrez que cet ensemble de formules n'a pas de modèle à deux éléments.*
2. *Indiquez un modèle (très connu) de cet ensemble de formules, en précisant le domaine de ce modèle et le sens de la relation $<$.*
3. *Montrez que cet ensemble de formules n'a pas de modèle fini.*
   Indication : déduire une contradiction de l'hypothèse qu'il y a un modèle fini.

Réponse

$\square$

Réponses

Exercice 1, page 1

On donne tout d'abord les réponses, puis la façon de les calculer :

Interprétation	Totale	Irréflexive	Symétrique
I	1	0	1
J	1	1	1
K	1	1	0

- Evaluons dans I les trois formules $\forall x \exists y r(x,y) = r(0,0) = 1$
  $\forall x \neg r(x,x) = \neg r(0,0) = 0$
  $\forall x \forall y (r(x,y) \Rightarrow r(y,x)) = r(0,0) \Rightarrow r(0,0) = 1$
- Evaluons dans J les trois formules $\forall x \exists y r(x,y) = (r(0,0)+r(0,1)).(r(1,0)+r(1,1) = 1$ car $r(0,1) = r(1,0) = 1$
  $\forall x \neg r(x,x) = \neg r(0,0).\neg r(1,1) = 1$, car $r(0,0) = r(1,1) = 0$
  $\forall x \forall y (r(x,y) \Rightarrow r(y,x)) = (r(0,0) \Rightarrow r(0,0)).(r(0,1) \Rightarrow r(1,0)).(r(1,0) \Rightarrow r(0,1)).(r(1,1) \Rightarrow r(1,1)) = 1$ car $r(0,1) = r(1,0) = 1$
- Evaluons dans K les trois formules $\forall x \exists y r(x,y) = (r(0,0)+r(0,1)+r(0,2)).(r(1,0)+r(1,1)+r(1,2)).(r(2,0)+r(2,1)+r(2,2)) = 1$ car $r(0,1) = r(1,2) = r(2,0) = 1$
  $\forall x \neg r(x,x) = \neg r(0,0).\neg r(1,1).\neg r(2,2) = 1$, car $r(0,0) = r(1,1) = r(2,2) = 0$
  $\forall x \forall y (r(x,y) \Rightarrow r(y,x)) = (r(0,0) \Rightarrow r(0,0)).(r(0,1) \Rightarrow r(1,0)).\ldots = 0$ car $r(0,1) = 1$ et $r(1,0) = 0$

Exercice 2, page 1

Preuve en déduction naturelle :

numéro	preuve	justification
1	supposons $\exists x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)$	
2	$\exists x\, p(x)$	$\wedge$E1 1
3	$\forall x\, q(x)$	$\wedge$E2 1
4	supposons $p(x)$	
5	$q(x)$	$\forall$E 3
6	$p(x) \wedge q(x)$	$\wedge$I 4, 5
7	$\exists x (p(x) \wedge q(x)$	$\exists$I 6
8	donc $p(x) \Rightarrow \exists x (p(x) \wedge q(x)$	$\Rightarrow$I 4, 7
9	$\exists x (p(x) \wedge q(x))$	$\exists$E 2, 8
10	donc $\exists x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x) \Rightarrow \exists x (p(x) \wedge q(x))$	$\Rightarrow$I 1, 9

Preuve par résolution. On commence par mettre en forme clausale la négation de la formule ci-dessus :
On la met en forme normale :
$\neg(\exists x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x) \Rightarrow \exists x (p(x) \wedge q(x))$
$= \exists x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x) \wedge \forall x (\neg p(x) \vee \neg q(x))$
On la met sous forme propre :
$= \exists x\, p(x) \wedge \forall y\, q(y) \wedge \forall z (\neg p(z) \vee \neg q(z))$
On skolémise et on enlève les quantificateurs universels :
$\simeq p(a) \wedge q(y) \wedge (\neg p(z) \vee \neg q(z))$
Ce qui donne les trois clauses :

$p(a)$
$q(y)$
$\neg p(z) \vee \neg q(z)$

De ces trois clauses, on déduit la clause vide par la preuve :

$$\dfrac{q(y) \qquad \dfrac{p(a) \qquad \neg p(z) \vee \neg q(z)}{\neg q(a)}\ z := a}{\perp}\ y := a$$

Exercice 3, page 2

On construit l'expansion de la négation sur le domaine $\{0,1\}$ avec les abréviations suivantes, $p(0)$ est abrégé en $p0$, $p(1)$ est abrégé en $p1$, et l'on fait de même pour q. Avec ces abréviations, l'expansion de la négation est :
$\overline{(p0.q0+p1.q1 \Rightarrow (p0+p1).q0.q1)}$
$= (p0.q0+p1.q1).\overline{((p0+p1).q0.q1}$
$= (p0.q0+p1.q1).(\overline{p0}.\overline{p1}+\overline{q0}+\overline{q1})$
$= (p0+p1.q1).(q0+p1.q1).(\overline{p0}+\overline{q0}+\overline{q1}).(\overline{p1}+\overline{q0}+\overline{q1})$
$= (p0+p1).(p0+q1).(q0+p1).(q0+q1).(\overline{p0}+\overline{q0}+\overline{q1}).(\overline{p1}+\overline{q0}+\overline{q1})$.
On peut appliquer l'algorithme de Davis et Putnam :

$$(p0+p1),(p0+q1),(q0+p1).(q0+q1),(\overline{p0}+\overline{q0}+\overline{q1}),(\overline{p1}+\overline{q0}+\overline{q1})$$

$$\Big\downarrow \text{p0=0}$$

$$(p1),(q1),(q0+q1),(\overline{p1}+\overline{q0}+\overline{q1})$$

$$\Big\downarrow \text{RU : p1=1,q1=1}$$

$$\overline{q0}$$

$$\Big\downarrow \text{ELI : q0=0}$$

$$\emptyset$$

Cela donne l'interprétation I de domaine $\{0,1\}$ avec $p_I = \{1\}, q_I = \{1\}$, qui est un contre-modèle de la formule $\exists x\ (p(x) \land q(x)) \Rightarrow \exists x\ p(x) \land \forall x\ q(x)$. Par suite cette formule n'est pas valide.

Exercice 4, page 2

Preuve en déduction naturelle :

numéro	preuve	justification
1	supposons $\forall x(p(x) \Rightarrow r(x)) \land \forall x(q(x) \Rightarrow r(x)) \land \exists x(p(x) \lor q(x))$	
2	$\forall x(p(x) \Rightarrow r(x)) \land \forall x(q(x) \Rightarrow r(x))$	$\land$E1 1
3	$\exists x(p(x) \lor q(x))$	$\land$E2 1
4	$\forall x(p(x) \Rightarrow r(x))$	$\land$E1 2
5	$\forall x(q(x) \Rightarrow r(x))$	$\land$E2 2
6	supposons $p(x) \lor q(x)$	
7	$p(x) \Rightarrow r(x)$	$\forall$E 4
8	$q(x) \Rightarrow r(x)$	$\forall$E 5
9	$r(x)$	$\lor$E 6, 7, 8
10	donc $p(x) \lor q(x) \Rightarrow r(x)$	$\Rightarrow$I 6, 9
11	$r(x)$	$\exists$E 3, 10
12	$\exists x r(x)$	$\exists$I 11
13	donc $\forall x(p(x) \Rightarrow r(x)) \land \forall x(q(x) \Rightarrow r(x)) \land \exists x(p(x) \lor q(x)) \Rightarrow \exists x\ r(x)$	

Preuve par résolution. On commence par mettre en forme clausale la négation de la formule ci-dessus :
On la met en forme normale : $\neg(\forall x(p(x) \Rightarrow r(x)) \land \forall x(q(x) \Rightarrow r(x)) \land \exists x(p(x) \lor q(x)) \Rightarrow \exists x\ r(x))$
$= \forall x(p(x) \Rightarrow r(x)) \land \forall x(q(x) \Rightarrow r(x)) \land \exists x(p(x) \lor q(x)) \land \forall x \neg r(x)$
$= \forall x(\neg p(x) \lor r(x)) \land \forall x(\neg q(x) \lor r(x)) \land \exists x(p(x) \lor q(x)) \land \forall x \neg r(x)$
On la met sous forme propre : $= \forall x(\neg p(x) \lor r(x)) \land \forall y(\neg q(y) \lor r(y)) \land \exists z(p(z) \lor q(z)) \land \forall u \neg r(u)$
On skolémise et on enlève les quantificateurs universels :
$\simeq (\neg p(x) \lor r(x)) \land (\neg q(y) \lor r(y)) \land (p(a) \lor q(a)) \land \neg r(u)$
Ce qui donne les quatre clauses :

$\neg p(x) \lor r(x)$
$\neg q(y) \lor r(y)$
$p(a) \lor q(a)$

$\neg r(u)$

De ces quatre clauses, on déduit la clause vide par la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p(x)\vee r(x) \quad \neg r(u)}{\neg p(x)}\, u:=x \qquad p(a)\vee q(a)}{q(a)}\, x:=a \qquad \neg q(y)\vee r(y)}{r(a)}\, y:=a \qquad \neg r(u)}{\bot}\, u:=a$$

Exercice 5, page 2

Unificateur le plus général

L'unificateur $x := f(k(a)), y := k(a), z := k(a)$ est un unificateur mais ce n'est pas l'unificateur le plus général.
En effet l'équation $g(h(x), y) = g(h(f(y)), z)$ se décompose en :
$h(x) = h(f(y)), y = z$
En décomposant la première équation, on obtient :
$x = f(y), y = z$
En éliminant x puis y, on obtient l'unificateur le plus général $x := f(z), y := z$.
Si on oriente $y = z$ en $z := y$, on obtient l'autre unificateur plus général $x := f(y), z := y$.

Calcul des unificateurs

1. L'équation $f(x, g(h(z), x), y) = f(k(z), y, g(u, z))$ se décompose en :
   $x = k(z), g(h(z), x) = y, y = g(u, z)$
   Éliminons x, on obtient :
   $x := k(z), g(h(z), k(z)) = y, y = g(u, z)$
   Orientons la deuxième équation, puis éliminons y, on obtient :
   $x := k(z), y := g(h(z), k(z)), g(h(z), k(z)) = g(u, z)$
   Décomposons la dernière équation, on obtient :
   $x := k(z), y := g(h(z), k(z)), h(z) = u, k(z) = z$
   Il est clair que la dernière équation n'a pas de solution, donc aussi l'équation initiale.
2. L'équation $f(x, g(h(z), x), y) = f(k(z), y, g(h(j(u)), x))$ se décompose en :
   $x = k(z), g(h(z), x) = y, y = g(h(j(u)), x)$
   Éliminons x, on obtient :
   $x := k(z), g(h(z), k(z)) = y, y = g(h(j(u)), k(z))$
   Orientons la deuxième équation, puis éliminons y, on obtient :
   $x = k(z), y := g(h(z), k(z)), g(h(z), k(z)) = g(h(j(u)), k(z))$
   Décomposons la dernière équation, on obtient :
   $x = k(z), y := g(h(z), k(z)), h(z) = h(j(u)), k(z) = k(z)$ La dernière équation peut être éliminée, et la troisième décomposée, ce qui donne :
   $x = k(z), y := g(h(z), k(z)), z = j(u)$
   En éliminant z, on obtient :
   $x = k(j(u)), y := g(h(j(u)), k(j(u))), z := j(u)$

Exercice 6, page 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P(x)\vee R(f(x)) \qquad \dfrac{P(f(x))\vee R(x)}{P(f(y))\vee R(y)}\, copie}{R(f(f(y)))\vee R(y)}\, x:=f(y) \qquad \neg R(x)}{R(f(f(y)))}\, x:=y \qquad \neg R(x)}{\bot}\, x:=f(f(y))$$

Exercice 7, page 2

On met en forme clausale les trois hypothèses, puis la négation de la conclusion :
Mise en forme normale de H1 :
$= \forall x(\neg u(x) \vee v(x) \vee \exists y(s(x,y) \wedge q(y)))$
On skolémise et on enlève le quantificateur universel :
$\simeq \neg u(x) \vee v(x) \vee s(x, f(x)) \wedge q(f(x))$.
Autrement dit H1 a produit les deux clauses :
(C1) $\neg u(x) \vee v(x) \vee s(x, f(x))$
(C2) $\neg u(x) \vee v(x) \vee q(f(x))$
Mise en forme normale de H2 :
$= \exists x(p(x) \wedge u(x) \wedge \forall y(\neg s(x,y) \vee p(y)))$ On skolémise et on enlève le quantificateur universel :
$\simeq p(a) \wedge u(a) \wedge (\neg s(a,y) \vee p(y))$
Donc H2 engendre les trois clauses :
(C3) $p(a)$
(C4) $u(a)$
(C5) $\neg s(a,y) \vee p(y)$
Il est évident que H3 engendre la clause :
(C6) $\neg p(x) \vee \neg v(x)$
Il est évident que la négation de la conclusion engendre la clause :
(C7) $\neg p(x) \vee \neg q(x)$.
Nous obtenons la preuve suivante (que nous présentons en trois parties par manque de place).
Preuve de $s(a, f(a))$

$$\dfrac{\dfrac{\neg p(x) \vee \neg v(x) \quad p(a)}{\neg v(a)}\; x := a \qquad \dfrac{u(a) \quad \neg u(x) \vee v(x) \vee s(x, f(x))}{v(a) \vee s(a, f(a))}\; x := a}{s(a, f(a))}$$

Preuve de $\neg s(a, f(a))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{u(a) \quad \neg u(x) \vee v(x) \vee q(f(x))}{v(a) \vee q(f(a))}\; x := a \qquad \dfrac{\neg p(x) \vee \neg v(x) \quad p(a)}{\neg v(a)}\; x := a}{q(f(a))} \qquad \dfrac{\neg p(x) \vee \neg q(x) \quad \neg s(a,y) \vee p(y)}{\neg q(x) \vee \neg s(a,x)}\; x := y}{\neg s(a, f(a))}\; x := f(a)$$

Preuve de $\perp$

$$\dfrac{s(a, f(a)) \quad \neg s(a, f(a))}{\perp}$$

Exercice 8, page 3

L'ensemble de formules n'a pas de modèle à deux éléments. On répond à cette question en construisant l'expansion des trois formules sur le domaine $\{0,1\}$ et en la mettant directement sous forme de produits de clauses :
$(0 < 0 + 0 < 1).(1 < 0 + 1 < 1)$.
$\overline{0 < 0}.\overline{1 < 1}$.
$(\overline{0 < 0} + \overline{0 < 0} + 0 < 0)$.
$(\overline{0 < 0} + \overline{0 < 1} + 0 < 1)$.
$(\overline{0 < 1} + \overline{1 < 0} + 0 < 0)$.
$(\overline{0 < 1} + \overline{1 < 1} + 0 < 1)$.
$(\overline{1 < 0} + \overline{0 < 0} + 1 < 0)$.
$(\overline{1 < 0} + \overline{0 < 1} + 1 < 1)$.
$(\overline{1 < 1} + \overline{1 < 0} + 1 < 0)$.
$(\overline{1 < 1} + \overline{1 < 1} + 1 < 1)$
On peut appliquer l'algorithme de Davis et Putnam à ce produit de clauses :

$$(0<0+0<1).(1<0+1<1).$$
$$\overline{0<0}.\overline{1<1}.$$
$$(\overline{0<0}+\overline{0<0}+0<0).$$
$$(\overline{0<0}+\overline{0<1}+0<1).$$
$$(\overline{0<1}+\overline{1<0}+0<0).$$
$$(\overline{0<1}+\overline{1<1}+0<1).$$
$$(\overline{1<0}+\overline{0<0}+1<0).$$
$$(\overline{1<0}+\overline{0<1}+1<1).$$
$$(\overline{1<1}+\overline{1<0}+1<0).$$
$$(\overline{1<1}+\overline{1<1}+1<1)$$
$$\text{RU}\Big\downarrow$$
$$(0<1).(1<0).(\overline{0<1}+\overline{1<0}).(\overline{1<0}+\overline{0<1})$$
$$\text{Réduction}\Big\downarrow$$
$$(0<1).(1<0).(\overline{0<1}+\overline{1<0})$$
$$\text{RU}\Big\downarrow$$
$$\perp$$

L'ensemble de formules n'a pas de modèle fini. Il est hors de question d'appliquer un algorithmique, il faut raisonner.
Supposons qu'il y a un modèle I avec n éléments au plus, où n est un entier naturel
D'après la première formule, il existe $(n+1)$ éléments $a_{i(0\leq i\leq n)}$ telle que pour tout i où $0\leq i\leq n$, on a $(a_i,a_{i+1})\in<_I$
Puique que le modèle comporte au plus n éléments, il existe deux entiers j et k tels que $j<k$ et $a_j=a_k$.
D'après la troisième formule, la relation $<_I$ est transitive, donc $(a_j,a_j)\in<_I$.
D'après la première formule, la relation $<_I$ est irréflexive, donc $(a_j,a_j)\notin<_I$.
On a une contradiction.
Donc il n'y a pas de modèle avec n éléments.
Puisque n est quelconque, il n'y a pas de modèle fini.