# Inf242 : Examen deuxième session

Michel Lévy

20 juillet 2008

Durée : 2h
Documents autorisés : une feuille RV format A4
**Remarque** : On peut utiliser indifféremment les notations logiques et booléennes.
Priorité : On rappelle que les quantificateurs et la négation ont la plus grande priorité suivie des priorités dans l'ordre décroissant de la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence.
Barème *indicatif* :

| exercice | barème | exercice | bareme |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 4 | 3 |
| 5 | 2 | 6 | 6 |
| 7 | 4 | | |

Ce barème est sur 22, on prendra donc le minimum de votre note et de 20.

## 1 Logique propositionnelle

**Exercice 1 (Comparer plusieurs méthodes, 3 points)** *L'ensemble de clauses ci-dessous*
$(a+b+\overline{d}), (d+c), (\overline{a}+b), (\overline{a}+\overline{c}), (\overline{b}+c), (\overline{c}+a)$
*est insatisfaisable. On demande de le vérifier par trois méthodes :*

1. *Écrire une preuve de* $\perp$ *par résolution*
2. *Appliquer l'algorithme de Davis et Putnam et donner la trace de l'algorithme.*
3. *On assimile l'ensemble de clauses à un produit de clauses et on transforme ce produit de clauses en une somme de monômes, qui doit donner* 0 *une fois simplifiée. On donnera les principales étapes de cette transformation*

Réponse □

**Exercice 2 (Correction des raisonnements, 2 points)** *Des hypothèses suivantes :*
$p \vee q$
$p \Rightarrow r$
$q \Rightarrow r \vee s$
*On a déduit :*
$r \vee s \vee t$
*Ce raisonnement est-il correct ? Justifier votre réponse par la méthode de votre choix (par exemple en utilisant l'algorithme de Davis et Putnam).*

Réponse □

**Exercice 3 (Correction des raisonnements, 2 points)** *Des hypothèses suivantes :*
$a \vee b$
$a \Rightarrow c$
$b \Rightarrow d$
$c \vee d \Rightarrow p$
*On a déduit :*
$p \wedge c$
*Ce raisonnement est-il correct ? Justifier votre réponse par la méthode de votre choix (par exemple en utilisant l'algorithme de Davis et Putnam).* Réponse

□

**Exercice 4 (Deduction naturelle, 3 points)** *Prouver par la déduction naturelle, avec les règles et la présentation du cours, les formules suivantes :*

1. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow s)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow s)$
2. $\neg a \wedge (a \vee b) \Rightarrow b$
3. $(\neg b \Rightarrow \neg a) \Rightarrow (a \Rightarrow b)$
   *On indique, que, pour prouver cette formule, il faut utiliser la réduction à l'absurde.*

Réponse

□

## 2 Logique premier ordre

**Exercice 5 (Contre-modèle, 2 points)** *La formule*
$\forall x \exists y\, r(x,y) \Rightarrow \exists x\, r(x,x)$
*n'est pas valide. Donnez-en un contre-modèle et montrez comment ce contre-modèle a été construit.* Réponse □

**Exercice 6 (Déduction naturelle, Résolution, 6 points)** *La formule*
$\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$
*est valide.*
*Le montrer par deux méthodes :*

1. *donner une preuve de la formule en déduction naturelle avec les règles et la présentation du cours*
2. *donner une preuve par résolution au premier ordre. On donnera la forme clausale de la négation de la formule et la preuve par résolution de la clause vide à partir de cette forme clausale.*

Réponse □

**Exercice 7 (Déduction naturelle et égalité, 4 points)**
*Dans cet exercice, $s(x)$ est le successeur de $x$, et on abrège $\neg(x = y)$ en $x \neq y$.*
*On fait de l'arithmétique avec les formules suivantes :*
*(Q1)* $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
*(Q2)* $\forall x (0 \neq s(x))$
*(Q3)* $\forall x (x + 0 = x)$
*(Q4)* $\forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$
*Prouver, par la déduction naturelle, que de ces hypothèses on peut déduire les formules suivantes :*

1. $s(0) + s(0) = s(s(0))$
2. $s(0) \neq s(s(0))$

Réponse

□

# Réponses

## Exercice 1, page 1

1. preuve par résolution

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(a+b+\overline{d}) \quad (d+c)}{(a+b+c)} \quad (\overline{a}+b)}{(b+c)} \quad (\overline{b}+c)}{(c)} \quad (\overline{c}+a)}{(a)} \quad (\overline{a}+\overline{c})}{(\overline{c})} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(a+b+\overline{d}) \quad (d+c)}{(a+b+c)} \quad (\overline{a}+b)}{(b+c)} \quad (\overline{b}+c)}{(c)}}{\perp}
$$

2. Application de Davis et Putnam

$$
\begin{tikzcd}
 & (a+b+\overline{d}),(d+c),(\overline{a}+b),(\overline{a}+\overline{c}),(\overline{b}+c),(\overline{c}+a) \arrow[dl, "a=0"'] \arrow[dr, "a=1"] & \\
(d+c),(b+c),(\overline{b}+c),\overline{c} \arrow[d, "RU"'] & & (d+c),(b),(\overline{b}+c),(\overline{c}) \arrow[d, "RU"'] \\
(d),(b),(\overline{b}) \arrow[d, "RU"'] & & (d),\perp \\
\perp & &
\end{tikzcd}
$$

3. Transformation du produit de clauses en somme de monômes

| formule | explication |
|---|---|
| $(a+b+\overline{d}).(d+c).(\overline{a}+b).(\overline{a}+\overline{c}).(\overline{b}+c).(\overline{c}+a)$ | |
| $=(a.d+a.c+b.d+b.c+\overline{d}.c).(\overline{a}+b).(\overline{a}+\overline{c}).(\overline{b}+c).(\overline{c}+a)$ | distributivité et simplification |
| $=(a.d.b+a.c.b+b.d.\overline{a}+b.d+b.c.\overline{a}+b.c+\overline{d}.c.\overline{a}+\overline{d}.c.b).(\overline{a}+\overline{c}).(\overline{b}+c).(\overline{c}+a)$ | distributivité et simplification |
| $=(b.d+b.c+\overline{d}.c.\overline{a}).(\overline{a}+\overline{c}).(\overline{b}+c).(\overline{c}+a)$ | réduction par $b.c$ et $b.d$ |
| $=(b.d.\overline{a}+b.d.\overline{c}+b.c.\overline{a}+\overline{d}.c.\overline{a}).(\overline{b}+c).(\overline{c}+a)$ | distributivité et simplification |
| $=(b.d.\overline{a}.c+b.c.\overline{a}+\overline{d}.c.\overline{a}.\overline{b}+\overline{d}.c.\overline{a}).(\overline{c}+a)$ | distributivité et simplification |
| $=0$ | distributivité et simplification |

## Exercice 2, page 1

Le raisonnement est correct si et seulement la conjonction des hypothèses et de la négation de la conclusion est insatisfaisable. Afin d'appliquer l'algorithme de Davis et Putnam, on commence par transformer cette conjonction en un produit de clauses.

$(p+q).(p \Rightarrow r).(q \Rightarrow r+s).\overline{r+s+t}$

$=(p+q).(\overline{p}+r).(\overline{q}+r+s).\overline{r}.\overline{s}.\overline{t}$ par élimination des implications et déplacements des négations.

On peut maintenant appliquer l'algorithme de Davis et Putnam :

$$
\begin{array}{c}
(p+q).(\overline{p}+r).(\overline{q}+r+s).(\overline{r}).(\overline{s}).(\overline{t}) \\
\Big\downarrow \text{RU} \\
(p+q).(\overline{p}).(\overline{q}) \\
\Big\downarrow \text{RU} \\
\perp
\end{array}
$$

Donc le raisonnement est correct.

## Exercice 3, page 2

Le raisonnement est correct si et seulement la conjonction des hypothèses et de la négation de la conclusion est insatisfaisable. Afin d'appliquer l'algorithme de Davis et Putnam, on commence par transformer cette conjonction en un produit de clauses.

$(a+b).(a \Rightarrow c).(b \Rightarrow d).(c \vee d \Rightarrow p).\overline{p.c}$

$= (a+b).(\overline{a}+c).(\overline{b}+d).(\overline{c}.\overline{d}+p).(\overline{p}+\overline{c})$ par élimination des implications et déplacement des négations

$= (a+b).(\overline{a}+c).(\overline{b}+d).(\overline{c}+p).(\overline{d}+p).(\overline{p}+\overline{c})$ par distributivité de la somme sur le produit.

On peut maintenant appliquer l'algorithme de Davis et Putnam :

$$
\begin{array}{c}
(a+b).(\overline{a}+c).(\overline{b}+d).(\overline{c}+p).(\overline{d}+p).(\overline{p}+\overline{c}) \\
\Big\downarrow \text{a=0} \\
(b).(\overline{b}+d).(\overline{c}+p).(\overline{d}+p).(\overline{p}+\overline{c}) \\
\Big\downarrow \text{RU : b=1} \\
(d).(\overline{c}+p).(\overline{d}+p).(\overline{p}+\overline{c}) \\
\Big\downarrow \text{RU : d=1} \\
(\overline{c}+p).(p).(\overline{p}+\overline{c}) \\
\Big\downarrow \text{RU : p=1} \\
(\overline{c}) \\
\Big\downarrow \text{RU : c=0} \\
\emptyset
\end{array}
$$

Donc le raisonnement est incorrect. L'assignation $a=0, b=1, d=1, p=1, c=0$ rend vraies les hypothèses et fausse la conclusion.

## Exercice 4, page 2

1. Preuve de $(p \Rightarrow (q \Rightarrow s)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow s)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Supposons $p \Rightarrow (q \Rightarrow s)$ | |
| 2 | Supposons $p \wedge q$ | |
| 3 | $p$ | $\wedge$E1 2 |
| 4 | $q \Rightarrow s$ | $\Rightarrow$E 1, 3 |
| 5 | $q$ | $\wedge$E2 2 |
| 6 | $s$ | $\Rightarrow$E 4, 5 |
| 7 | Donc $p \wedge q \Rightarrow s$ | $\Rightarrow$I 2, 6 |
| 8 | Donc $(p \Rightarrow (q \Rightarrow s)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow s)$ | $\Rightarrow$I 1,7 |

2. Preuve de $\neg a \wedge (a \vee b) \Rightarrow b$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Supposons $\neg a \wedge (a \vee b)$ | |
| 2 | $\neg a$ | $\wedge$E1 1 |
| 3 | $a \vee b$ | $\wedge$E2 1 |
| 4 | Supposons $a$ | |
| 5 | $\perp$ | $\Rightarrow$E 2, 4 |
| 6 | $b$ | Efq 5 |
| 7 | Donc $a \Rightarrow b$ | $\Rightarrow$I 4, 6 |
| 8 | Supposons $b$ | |
| 9 | Donc $b \Rightarrow b$ | $\Rightarrow$I 8, 8 |
| 10 | $b$ | $\vee$E 3, 7, 9 |
| 11 | Donc $\neg a \wedge (a \vee b) \Rightarrow b$ | $\Rightarrow$I 1, 10 |

3. Preuve de $(\neg b \Rightarrow \neg a) \Rightarrow (a \Rightarrow b)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Supposons $\neg b \Rightarrow \neg a$ | |
| 2 | Supposons $a$ | |
| 3 | Supposons $\neg b$ | |
| 4 | $\neg a$ | $\Rightarrow$E 1, 3 |
| 5 | $\perp$ | $\Rightarrow$E 2, 4 |
| 6 | Donc $\neg\neg b$ | $\Rightarrow$I 3, 5 |
| 7 | $b$ | RAA 6 |
| 8 | Donc $a \Rightarrow b$ | $\Rightarrow$I 2, 7 |
| 9 | Donc $(\neg b \Rightarrow \neg a) \Rightarrow (a \Rightarrow b)$ | $\Rightarrow$I 1, 8 |

## Exercice 5, page 2

On construit l'expansion de la formule sur le domaine $\{0,1\}$. Abrégeons $r(0,0)$ en $r00$, $r(0,1)$ en $r01$, $r(1,0)$ en $r10$ et $r(1,1)$ en $r11$.
L'expansion est : $(r00 + r01).(r10 + r11) \Rightarrow (r00 + r11)$.
L'assignation $r00 = r11 = 0, r01 = r10 = 1$ rend faux cette expansion, donc l'interprétation $I$ de domaine $\{0,1\}$ avec $r_I = \{(0,1),(1,0)\}$ est un contre-modèle de la formule, qui n'est donc pas valide

## Exercice 6, page 2

1. Preuve de la formule en déduction naturelle

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Supposons $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | |
| 2 | $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x))$ | $\wedge$E1 1 |
| 3 | $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | $\wedge$E2 1 |
| 4 | Supposons $P(x) \wedge Q(x)$ | |
| 5 | $P(x)$ | $\wedge$E1 4 |
| 6 | $Q(x)$ | $\wedge$E2 4 |
| 7 | $Q(x) \Rightarrow R(x)$ | $\forall$E $x$, 2 |
| 8 | $R(x)$ | $\Rightarrow$E 6, 7 |
| 9 | $P(x) \wedge R(x)$ | $\wedge$I 5, 8 |
| 10 | $\exists x(P(x) \wedge R(x))$ | $\exists$I $x$, 9 |
| 11 | Donc $(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$ | $\Rightarrow$I 4, 10 |
| 12 | $\exists x(P(x) \wedge R(x))$ | $\exists$E 3, 11 |
| 13 | Donc $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$ | $\Rightarrow$I 1, 12 |

2. Preuve de la formule par résolution
On met en forme clausale la négation de la formule. Tout d'abord, on transforme cette négation en forme normale :

$\neg(\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x)))$
$= \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x))$ déplacement des négations
$= \forall x(\neg Q(x) \vee R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x))$ élimination de l'implication

Transformation en formule propre (on est en fait dans un cas où cette transformation est inutile) :
$= \forall x(\neg Q(x) \vee R(x)) \wedge \exists y(P(y) \wedge Q(y)) \wedge \forall z(\neg P(z) \vee \neg R(z))$

Elimination des quantificateurs existentiels (par skolémisation) et suppression des quantificateurs universels :
$\simeq (\neg Q(x) \vee R(x)) \wedge (P(a) \wedge Q(a)) \wedge (\neg P(z) \vee \neg R(z))$.

Transformation en un ensemble de clauses : dans cet exemple, il suffit d'enlever les conjonctions et on obtient les 4 clauses :
(1) $\neg Q(x) \vee R(x)$, (2) $P(a)$, (3) $Q(a)$, (4) $\neg P(z) \vee \neg R(z)$

La preuve de la clause vide est immédiate :

$$\dfrac{\dfrac{P(a) \quad \neg P(z) \vee \neg R(z)}{\neg R(a)}\ z := a \qquad \dfrac{Q(a) \quad \neg Q(x) \vee R(x)}{R(a)}\ x := a}{\perp}$$

## Exercice 7, page 2

Preuve de $1+1=2$ : nous ne répétons pas l'environnement $Q1, Q2, Q3, Q4$ de la preuve.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall y(s(0)+s(y) = s(s(0)+y)$ | $\forall$E Q4 $x := s(0)$ |
| 2 | $s(0)+s(0) = s(s(0)+0)$ | $\forall$E 1 $y := 0$ |
| 3 | $s(0)+0 = s(0)$ | $\forall$E Q3 $x := s(0)$ |
| 4 | $s(0)+s(0) = s(\underline{s(0)})$ | congruence 2, 3 |

Preuve de $1 \neq 2$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | supposons $s(0) = s(s(0))$ | |
| 2 | $\forall y(s(0) = s(y) \Rightarrow 0 = y)$ | $\forall$E Q1 $x := 0$ |
| 3 | $s(0) = s(s(0)) \Rightarrow 0 = s(0)$ | $\forall$E 2 $y := s(0)$ |
| 4 | $0 = s(0)$ | $\Rightarrow$E 1, 3 |
| 5 | $0 \neq s(0)$ | $\forall$E Q2 $x := 0$ |
| 6 | $\perp$ | $\Rightarrow$E 4, 5 |
| 7 | donc $s(0) \neq s(s(0))$ | $\Rightarrow$I 1, 6 |