Déduction Naturelle: quanticateurs et égalité

Stéphane Devismes Pascal Lafourcade Michel Lévy

Université Joseph Fourier, Grenoble I

25 novembre 2008

Plan

Plan

Extension de la déduction naturelle propositionnelle

Extension de la déduction naturelle propositionnelle

- On ajoute des règles sur les quantificateurs, la copie (règle dérivée) et l'égalité aux règles de la déduction naturelle « propositionnelle ».

Extension de la déduction naturelle propositionnelle

- On ajoute des règles sur les quantificateurs, la copie (règle dérivée) et l'égalité aux règles de la déduction naturelle « propositionnelle ».
- Une seule règle pour enlever des hypothèses : l'introduction de l'implication.

Extension de la déduction naturelle propositionnelle

- On ajoute des règles sur les quantificateurs, la copie (règle dérivée) et l'égalité aux règles de la déduction naturelle « propositionnelle ».
- Une seule règle pour enlever des hypothèses : l'introduction de l'implication.
- Les définitions de **brouillon de preuve, environnement, contexte, formule utilisable** restent inchangées !

Cohérence et complétude

Cohérence et complétude

- **Nous allons montrer la cohérence des règles de notre système.**

Cohérence et complétude

- **Nous allons montrer la cohérence des règles de notre système.**
- **Nous admettrons sans preuve que ce système est complet.** On trouvera des preuves de complétude pour des systèmes de règles proches dans les livres suivants :
  - Peter B.Andrews. *An introduction to mathematical logic : to truth through proof*. Academic Press, 1986.
  - Herbert B.Enderton. *A mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, 2001.

Remarque

Contrairement au cas propositionnel, il n'y a aucun algorithme pour décider si une formule est valide ou non valide.

Autrement dit, en admettant l'équivalence entre prouvable (sans environnement) et valide, il n'y a pas d'algorithme qui, étant donné une formule, puisse nous en construire la preuve, ou nous avertir que cette formule n'a pas de preuve.

Plan

Rappel : Règles « propositionnelle »

Introduction		Élimination	
$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \dots\\ B\end{array}}{A\Rightarrow B}$	$\Rightarrow I$	$\dfrac{A \quad A\Rightarrow B}{B}$	$\Rightarrow E$
$\dfrac{A \quad B}{A\wedge B}$	$\wedge I$	$\dfrac{A\wedge B}{A}$ $\dfrac{A\wedge B}{B}$	$\wedge E1$ $\wedge E2$
$\dfrac{A}{A\vee B}$ $\dfrac{A}{B\vee A}$	$\vee I1$ $\vee I2$	$\dfrac{A\vee B \quad A\Rightarrow C \quad B\Rightarrow C}{C}$	$\vee E$

Règle du faux

$$\frac{\perp}{A}\ Efq$$

Règle à l'absurde

$$\frac{\neg\neg A}{A}\ RAA$$

Règles des quantificateurs

A et B sont des formules, x est une variable, t est un terme

$\dfrac{A}{\forall x A}$	$\forall I$	x ne doit être libre ni dans l'environnement de la preuve, ni dans le contexte de la prémisse de la règle
$\dfrac{\forall x A}{A{<}x{:=}t{>}}$	$\forall E$	t est libre pour x dans A
$\dfrac{A{<}x{:=}t{>}}{\exists x A}$	$\exists I$	t est libre pour x dans A
$\dfrac{\exists x A \qquad (A \Rightarrow B)}{B}$	$\exists E$	x ne doit être libre ni dans l'environnement, ni dans B, ni dans le contexte de la prémisse droite de la règle.

Plan

Introduction

On montre l'usage de ces règles sur des exemples,

Ainsi que les erreurs occasionnées par le non respect des conditions d'emploi des règles.

Prouvons $\forall x P(x) \land \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \land Q(x))$

Prouvons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

1	1	supposons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Prouvons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

1	1	supposons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	
1	2	$\forall x P(x)$	$\wedge E1$ 1

Prouvons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

1	1	supposons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	
1	2	$\forall x P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x Q(x)$	$\wedge E2$ 1

Prouvons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

1	1	supposons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	
1	2	$\forall x P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1	4	$P(x)$	$\forall E$ 2, x

Prouvons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

1	1	supposons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	
1	2	$\forall x P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1	4	$P(x)$	$\forall E$ 2, x
1	5	$Q(x)$	$\forall E$ 3, x

Prouvons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

1	1	supposons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	
1	2	$\forall x P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1	4	$P(x)$	$\forall E$ 2, x
1	5	$Q(x)$	$\forall E$ 3, x
1	6	$P(x) \wedge Q(x)$	$\wedge I$ 4, 5

Prouvons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

1	1	supposons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	
1	2	$\forall x P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1	4	$P(x)$	$\forall E$ 2, x
1	5	$Q(x)$	$\forall E$ 3, x
1	6	$P(x) \wedge Q(x)$	$\wedge I$ 4, 5
1	7	$\forall x (P(x) \wedge Q(x))$	$\forall I$ 5

Prouvons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$

1	1	supposons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	
1	2	$\forall x P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1	4	$P(x)$	$\forall E$ 2, x
1	5	$Q(x)$	$\forall E$ 3, x
1	6	$P(x) \wedge Q(x)$	$\wedge I$ 4, 5
1	7	$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	$\forall I$ 5
	8	donc $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$	$\Rightarrow$I 1, 6

Prouvons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$

1	1	supposons $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$	
1	2	$\forall x P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$\forall x Q(x)$	$\wedge E2$ 1
1	4	$P(x)$	$\forall E$ 2, x
1	5	$Q(x)$	$\forall E$ 3, x
1	6	$P(x) \wedge Q(x)$	$\wedge I$ 4, 5
1	7	$\forall x (P(x) \wedge Q(x))$	$\forall I$ 5
	8	donc $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$	$\Rightarrow$I 1, 6

Remarque : Noter que dans l'usage de la règle d'instanciation aux lignes 4 et 5, on a précisé que x est remplacé x.

Usage incorrect de la règle $\forall$E : où est l'erreur ?

1	1	supposons $\forall x \exists y p(x, y)$	
1	2	$\exists y p(y, y)$	$\forall E$ 1, y
	3	donc $\forall x \exists y p(x, y) \Rightarrow \exists y p(y, y)$	

Usage incorrect de la règle $\forall$E : où est l'erreur ?

1	1	supposons $\forall x \exists y p(x, y)$	
1	2	$\exists y p(y, y)$	$\forall E$ 1, y
	3	donc $\forall x \exists y p(x, y) \Rightarrow \exists y p(y, y)$	

Soit I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ avec $p_I = \{(0, 1), (1, 0)\}$.
Cette interprétation rend fausse la « conclusion ».

Usage incorrect de la règle ∀E : où est l'erreur ?

1	1	supposons $\forall x \exists y p(x,y)$	
1	2	$\exists y p(y,y)$	$\forall E$ 1, y ERREUR
	3	donc $\forall x \exists y p(x,y) \Rightarrow \exists y p(y,y)$	

Soit I l'interprétation de domaine $\{0,1\}$ avec $p_I = \{(0,1),(1,0)\}$.
Cette interprétation rend fausse la « conclusion ».

À la ligne 2, on a pas respecté les conditions d'applications de la règle ∀E car le terme y n'est pas libre pour x dans la formule $\exists y p(x,y)$.

Usage incorrect de la règle ∀I

1	1	supposons $P(x)$	
1	2	$\forall x P(x)$	$\forall I$ 1
	3	donc $P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$	$\Rightarrow$I 1, 2

Usage incorrect de la règle ∀I

1	1	supposons $P(x)$	
1	2	$\forall x P(x)$	$\forall I$ 1 ERREUR
	3	donc $P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$	$\Rightarrow$I 1, 2

À la ligne 2, on n'a pas respecté les conditions d'applications de la règle ∀I car la prémisse $P(x)$ est établie dans le contexte $P(x)$, ce qui interdit de généraliser sur x.

Usage incorrect de la règle ∃E

1	1	supposons $\exists x P(x)$	
1, 2	2	supposons $P(x)$	
1	3	donc $P(x) \Rightarrow P(x)$	$\Rightarrow I$ 2, 2
1	4	$P(x)$	$\exists E$ 1, 3
	5	donc $\exists x P(x) \Rightarrow P(x)$	

Usage incorrect de la règle ∃E

1	1	supposons $\exists x P(x)$	
1, 2	2	supposons $P(x)$	
1	3	donc $P(x) \Rightarrow P(x)$	$\Rightarrow I$ 2, 2
1	4	$P(x)$	$\exists E$ 1, 3 ERREUR
	5	donc $\exists x P(x) \Rightarrow P(x)$	

La conclusion de la règle $\exists E$ est $P(x)$, contrairement à la condition d'application de cette règle qui impose que la conclusion ne doit pas dépendre de x.

Usage incorrect de la règle ∃E

1	1	Supposons $\exists x P(x) \wedge (P(x) \Rightarrow \forall y Q(y))$	
1	2	$\exists x P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)$	$\wedge E2$ 1
1	4	$\forall y Q(y)$	$\exists E$ 2, 3
	5	Donc $(\exists x P(x) \wedge (P(x) \Rightarrow \forall y Q(y))) \Rightarrow \forall y Q(y)$	$\Rightarrow I$ 1,4

Usage incorrect de la règle $\exists$E

1	1	Supposons $\exists x P(x) \wedge (P(x) \Rightarrow \forall y Q(y))$	
1	2	$\exists x P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)$	$\wedge E2$ 1
1	4	$\forall y Q(y)$	$\exists E$ 2, 3
	5	Donc $(\exists x P(x) \wedge (P(x) \Rightarrow \forall y Q(y))) \Rightarrow \forall y Q(y)$	$\Rightarrow I$ 1,4

Soit I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ avec $P_I = Q_I = \{0\}$ et l'état e où $x = 1$. L'assignation *Ie* rend faux cette « conclusion ».

Usage incorrect de la règle ∃E

1	1	Supposons $\exists x P(x) \wedge (P(x) \Rightarrow \forall y Q(y))$	
1	2	$\exists x P(x)$	$\wedge E1$ 1
1	3	$P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)$	$\wedge E2$ 1
1	4	$\forall y Q(y)$	$\exists E$ 2, 3 ERREUR
	5	Donc $(\exists x P(x) \wedge (P(x) \Rightarrow \forall y Q(y))) \Rightarrow \forall y Q(y)$	$\Rightarrow I$ 1,4

Soit I l'interprétation de domaine $\{0,1\}$ avec $P_I = Q_I = \{0\}$ et l'état e où $x = 1$. L'assignation *Ie* rend faux cette « conclusion ».

On n'a pas respecté la condition que le contexte de chaque prémisse de la règle ne doit pas dépendre de x.

Prouvons $\neg\forall x A \Rightarrow \exists x \neg A$ (loi de Morgan)

Prouvons $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$

Prouvons $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$

Prouvons $\neg\forall x A \Rightarrow \exists x \neg A$ (loi de Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall x A$
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x \neg A$
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$

Prouvons $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Prouvons $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Prouvons $\neg\forall x A \Rightarrow \exists x \neg A$ (loi de Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall x A$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x \neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x \neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Prouvons $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1, 2	7	A	Raa 6

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Prouvons $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1, 2	7	A	Raa 6
1, 2	8	$\forall xA$	$\forall I$ 7

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Prouvons $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1, 2	7	A	Raa 6
1, 2	8	$\forall xA$	$\forall I$ 7
1, 2	9	$\perp$	$\Rightarrow E$ 1, 8

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Prouvons $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1, 2	7	A	Raa 6
1, 2	8	$\forall xA$	$\forall I$ 7
1, 2	9	$\perp$	$\Rightarrow E$ 1, 8
1	10	Donc $\neg\neg\exists x\neg A$	$\Rightarrow$ I 2, 9

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Prouvons $\neg\forall x A \Rightarrow \exists x \neg A$ (loi de Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall x A$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x \neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x \neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1, 2	7	A	Raa 6
1, 2	8	$\forall x A$	$\forall I$ 7
1, 2	9	$\perp$	$\Rightarrow E$ 1, 8
1	10	Donc $\neg\neg\exists x \neg A$	$\Rightarrow$ I 2, 9
1	11	$\exists x \neg A$	Raa 10

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Prouvons $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$ (loi de Morgan)

1	1	Supposons $\neg\forall xA$	
1, 2	2	Supposons $\neg\exists x\neg A$	
1, 2, 3	3	Supposons $\neg A$	
1, 2, 3	4	$\exists x\neg A$	$\exists I$ 3, x
1, 2, 3	5	$\perp$	$\Rightarrow E$ 2, 4
1, 2	6	Donc $\neg\neg A$	$\Rightarrow I$ 3, 5
1, 2	7	A	Raa 6
1, 2	8	$\forall xA$	$\forall I$ 7
1, 2	9	$\perp$	$\Rightarrow E$ 1, 8
1	10	Donc $\neg\neg\exists x\neg A$	$\Rightarrow$ I 2, 9
1	11	$\exists x\neg A$	Raa 10
	12	Donc $\neg\forall xA \Rightarrow \exists x\neg A$	$\Rightarrow$ I 1, 11

- À la ligne 4, on a utilisé le fait que $\neg A$ peut être vue comme le résultat de la substitution de x par x dans $\neg A$ et qu'une variable est toujours libre pour elle-même dans une formule.

Plan

Définition

La règle de copie consiste à déduire d'une formule, une autre formule égale au changement près des variables liées.

Rappel : Deux formules sont égales à un changement près de variables liées si on peut obtenir l'une à partir de l'autre par des remplacements de sous-formules, de la forme QxA par $QyA < x := y >$ où Q est un quantificateur et y est une variable qui ne figure pas dans QxA.

Définition

La règle de copie consiste à déduire d'une formule, une autre formule égale au changement près des variables liées.

Rappel : Deux formules sont égales à un changement près de variables liées si on peut obtenir l'une à partir de l'autre par des remplacements de sous-formules, de la forme QxA par $QyA < x := y >$ où Q est un quantificateur et y est une variable qui ne figure pas dans QxA.

Théorème (admis)

Soient A et A' deux formules copies l'une de l'autre. Il a une preuve de A dans l'environnement A'.

Règle dérivée

Dans le slide suivant, nous montrons que la règle de copie est une règle dérivée, c'est-à-dire que son emploi peut être remplacé par une preuve (parfois longue) en absence de cette règle.

La règle de copie est la seule règle dérivée que nous autorisons.

Preuve sans règle de copie de $\exists x p(x) \Rightarrow \exists y p(y)$

Preuve sans règle de copie de $\exists x p(x) \Rightarrow \exists y p(y)$

1	1	supposons $\exists x P(x)$

Preuve sans règle de copie de $\exists x p(x) \Rightarrow \exists y p(y)$

1	1	supposons $\exists x P(x)$
1, 2	2	supposons $P(x)$

Preuve sans règle de copie de $\exists xp(x) \Rightarrow \exists yp(y)$

1	1	supposons $\exists xP(x)$	
1, 2	2	supposons $P(x)$	
1, 2	3	$\exists yP(y)$	$\exists$I 2, x

Preuve sans règle de copie de $\exists x p(x) \Rightarrow \exists y p(y)$

1	1	supposons $\exists x P(x)$	
1, 2	2	supposons $P(x)$	
1, 2	3	$\exists y P(y)$	$\exists$I 2, x
1	4	donc $P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$	$\Rightarrow$I 2, 3

Preuve sans règle de copie de $\exists xp(x) \Rightarrow \exists yp(y)$

1	1	supposons $\exists xP(x)$	
1, 2	2	supposons $P(x)$	
1, 2	3	$\exists yP(y)$	$\exists$I 2, x
1	4	donc $P(x) \Rightarrow \exists yP(y)$	$\Rightarrow$I 2, 3
1	5	$\exists yP(y)$	$\exists$E 1, 4

Preuve sans règle de copie de $\exists xp(x) \Rightarrow \exists yp(y)$

1	1	supposons $\exists xP(x)$	
1, 2	2	supposons $P(x)$	
1, 2	3	$\exists yP(y)$	$\exists$I 2, x
1	4	donc $P(x) \Rightarrow \exists yP(y)$	$\Rightarrow$I 2, 3
1	5	$\exists yP(y)$	$\exists$E 1, 4
	6	donc $\exists xP(x) \Rightarrow \exists yP(y)$	$\Rightarrow$I 1, 5

Plan

Réflexivité et Congruence

Deux règles caractérisent l'égalité : un terme est égal à lui-même et si deux termes sont égaux, on peut les remplacer l'un par l'autre.

$\dfrac{}{t=t}$	réflexivité	t est un terme
$\dfrac{s=t \qquad A<x:=s>}{A<x:=t>}$	congruence	s et t sont deux termes libres pour la variable x dans la formule A

Exemple : Prouvons que $s = t \Rightarrow t = s$ (symétrie)

Exemple : Prouvons que $s = t \Rightarrow t = s$ (symétrie)

1	1	supposons $s = t$

Exemple : Prouvons que $s = t \Rightarrow t = s$ (symétrie)

1	1	supposons $s = t$	
1	2	$s = s$	réflexivité

Exemple : Prouvons que $s = t \Rightarrow t = s$ (symétrie)

1	1	supposons $s = t$		
1	2	$s = s$	réflexivité	
1	3	$t = s$	congruence 1, 2	$(s = s) = (x = s) < x := s >$
				$(t = s) = (x = s) < x := t >$

Exemple : Prouvons que $s = t \Rightarrow t = s$ (symétrie)

1	1	supposons $s = t$		
1	2	$s = s$	réflexivité	
1	3	$t = s$	congruence 1, 2	$(s = s) = (x = s) < x := s >$ $(t = s) = (x = s) < x := t >$
	3	donc $s = t \Rightarrow t = s$	$\Rightarrow$I 1, 3	

Exemple : Prouvons que $s = t \Rightarrow t = s$ (symétrie)

1	1	supposons $s = t$		
1	2	$s = s$	réflexivité	
1	3	$t = s$	congruence 1, 2	$(s = s) = (x = s) < x := s >$ $(t = s) = (x = s) < x := t >$
	3	donc $s = t \Rightarrow t = s$	$\Rightarrow$I 1, 3	

Remarque : Notons que la variable x ne figure pas dans la preuve, elle ne fait que marquer l'endroit où fait le remplacement de s par t. Dans les prochains exemples, on se contentera de *souligner* cet endroit.

Exemple : Prouvons que $s = t \wedge t = u \Rightarrow s = u$ (transitivité)

Exemple : Prouvons que $s = t \wedge t = u \Rightarrow s = u$ (transitivité)

1	1	supposons $s = t \wedge t = u$

Exemple : Prouvons que $s = t \wedge t = u \Rightarrow s = u$ (transitivité)

1	1	supposons $s = t \wedge t = u$	
1	2	$s = t$	$\wedge$E1 1

Exemple : Prouvons que $s = t \wedge t = u \Rightarrow s = u$ (transitivité)

1	1	supposons $s = t \wedge t = u$	
1	2	$s = t$	$\wedge$E1 1
1	3	$t = u$	$\wedge$E2 1

Exemple : Prouvons que $s = t \wedge t = u \Rightarrow s = u$ (transitivité)

1	1	supposons $s = t \wedge t = u$	
1	2	$s = t$	$\wedge$E1 1
1	3	$t = u$	$\wedge$E2 1
1	4	$s = \underline{u}$	congruence 3, 2

Exemple : Prouvons que $s = t \wedge t = u \Rightarrow s = u$ (transitivité)

1	1	supposons $s = t \wedge t = u$	
1	2	$s = t$	$\wedge$E1 1
1	3	$t = u$	$\wedge$E2 1
1	4	$s = \underline{u}$	congruence 3, 2
	5	donc $s = t \wedge t = u \Rightarrow s = u$	$\Rightarrow$I 1, 4

Plan

Introduction

1. Nous voyons tout d'abord deux tactiques de preuves pour les règles $\forall I$ et $\exists E$:
   1. Raisonner en avant avec une hypothèse d'existence,
   2. Raisonner en arrière pour généraliser.
2. Nous appliquons ces tactiques à un exemple.
   - Dans cet exemple, nous reverrons aussi des tactiques de preuve pour les connectives.

Raisonner en avant avec une hypothèse d'existence

Soit Γ un ensemble de formules, x une variable, A et B des formules.

Supposons que l'on cherche une preuve de C dans l'environnement $\Gamma, \exists x A$.

Raisonner en avant avec une hypothèse d'existence

Soit Γ un ensemble de formules, x une variable, A et B des formules.

Supposons que l'on cherche une preuve de C dans l'environnement $\Gamma, \exists x A$.

Deux cas possibles :

- x n'est libre ni dans Γ, ni dans C.
- x est libre dans Γ ou C.

1

Dans ce cas, la preuve peut toujours s'écrire :

supposons A	
$\boxed{\text{preuve de } C \text{ dans l'environnement } \Gamma, A}$	
donc $A \Rightarrow C$	$\Rightarrow$I 1,_
C	$\exists$E

$2^{\text{ème}}$ cas : x est libre dans Γ ou C

On choisit une variable y « nouvelle », c'est-à-dire non libre dans Γ, C et absente de A, puis on se ramène au cas précédent, via la règle de copie.

La preuve s'écrit alors :

$\exists y A < x := y >$	copie de $\exists x A$
supposons $A < x := y >$	
$\boxed{\text{preuve de } C \text{ dans l'environnement } \Gamma, A < x := y >}$	
donc $A < x := y > \Rightarrow C$	$\Rightarrow$I 1,_
C	$\exists$E

Remarques

La recherche de la preuve initiale a été réduite à la recherche d'une preuve dans un environnement plus simple.

C'est exactement le mode de raisonnement appliqué dans les cours de mathématiques quand on cherche une preuve d'une formule C avec l'hypothèse $\exists x P(x)$. On introduit une constante « nouvelle » a vérifiant $P(a)$ et on prouve C sous l'hypothèse $P(a)$.

Raisonner en arrière pour généraliser

Supposons que l'on cherche une preuve de $\forall x A$ dans l'environnement Γ.

Raisonner en arrière pour généraliser

Supposons que l'on cherche une preuve de $\forall x A$ dans l'environnement Γ.

Deux cas possibles :

- x n'est pas libre dans Γ.
- x est libre dans Γ.

1^{er} cas : x n'est pas libre dans Γ

$$\frac{\boxed{\text{preuve de } A \text{ dans l'environnement } \Gamma}}{\forall x A} \;\forall I$$

$2^{\text{ème}}$ cas : x est libre dans Γ

On choisit une variable y « nouvelle », c'est-à-dire non libre dans Γ, puis on se ramène au cas précédent, via la règle de copie.

La preuve s'écrit alors :

preuve de $A < x := y >$ dans l'environnement Γ	
$\forall x A < x := y >$	$\forall$I
$\forall x A$	copie de la formule précédente

Remarque

La recherche de la preuve initiale a été réduite à la recherche d'une preuve dans un environnement plus simple.

C'est exactement le mode de raisonnement appliqué dans les cours de mathématiques quand on cherche une preuve de $\forall x P(x)$. On introduit une constante « nouvelle » a et on prouve $P(a)$. Puis l'on ajoute : puisque le choix de a est arbitraire, on a $\forall x P(x)$.

Un exemple d'application des tactiques

On peut définir la notation « il existe un et un seul x » (en bref $\exists! x$) par :

1. $\exists! x P(x) \doteq \exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$.

Un exemple d'application des tactiques

On peut définir la notation « il existe un et un seul x » (en bref $\exists! x$) par :

1. $\exists! x P(x) \doteq \exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y)).$

En séparant l'existence de x et son unicité, on peut aussi la définir par :

2. $\exists! x P(x) \doteq \exists x P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y).$

Ces deux définitions sont bien sûr équivalentes et on montre ici formellement que **la première implique la deuxième**.

Un exemple d'application des tactiques

On peut définir la notation « il existe un et un seul x » (en bref $\exists! x$) par :

1. $\exists! x P(x) \doteq \exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$.

En séparant l'existence de x et son unicité, on peut aussi la définir par :

2. $\exists! x P(x) \doteq \exists x P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$.

Ces deux définitions sont bien sûr équivalentes et on montre ici formellement que **la première implique la deuxième**.

Comme la preuve est longue, nous allons la décomposer.

Plan de la preuve

Pour prouver

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$$

On applique les deux tactiques suivantes :

- Pour prouver $A \Rightarrow B$, supposer A et déduire B
- Pour prouver $A \wedge B$, prouver A et prouver B.

Plan de la preuve

Pour prouver

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$$

On applique les deux tactiques suivantes :

- Pour prouver $A \Rightarrow B$, supposer A et déduire B
- Pour prouver $A \wedge B$, prouver A et prouver B.

Ce qui nous donne :

1	supposons $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y))$	
	preuve de $\exists x P(x)$ dans l'environnement 1	
	preuve de $\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$ dans l'environnement 1	
	$\exists x P(x) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$	$\wedge$I
	donc $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$	$\Rightarrow$I

Application de la tactique utilisant une hypothèse d'existence

On utilise cette tactique pour prouver

$\exists x P(x)$ dans l'environnement de $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y))$

Application de la tactique utilisant une hypothèse d'existence

On utilise cette tactique pour prouver

$\exists x P(x)$ dans l'environnement de $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y))$

Ce qui nous donne :

référence	formule	
i	$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y))$	
1	supposons $P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y)$	
2	$P(x)$	$\wedge$E1 1
3	$\exists x P(x)$	$\exists$I 2, x
3	donc $P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y) \Rightarrow \exists x P(x)$	$\Rightarrow$I 1,2
4	$\exists x P(x)$	$\exists$E i, 3

Application de la tactique pour obtenir une conclusion générale : Plan de preuve

Pour prouver $\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$ dans l'environnement $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \Rightarrow x = y))$

On applique, les tactiques suivantes :

1. « raisonner en avant en utilisant d'une hypothèse existentielle ».
2. Pour prouver $A \Rightarrow B$, supposer A et déduire B
3. « raisonner en arrière pour obtenir une conclusion générale ».

Application de la tactique pour obtenir une conclusion générale : Preuve

référence	formule	
i	$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y))$	
1	supposons $P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y)$	
2	supposons $P(u) \wedge P(y)$	
3	$\forall y(P(y) \Rightarrow x = y)$	$\wedge$E2 1
4	$P(u)$	$\wedge$E1 2
5	$P(u) \Rightarrow x = u$	$\forall$E 3, u
6	$x = u$	$\Rightarrow$E 4, 5
7	$P(y)$	$\wedge$E2 2
8	$P(y) \Rightarrow x = y$	$\forall$E 3, y
9	$x = y$	$\Rightarrow$E 7, 8
10	$\underline{u} = y$	congruence 6, 9
11	donc $P(u) \wedge P(y) \Rightarrow u = y$	$\Rightarrow$I 2, 10
12	$\forall y(P(u) \wedge P(y) \Rightarrow u = y)$	$\forall$I 11
13	$\forall u \forall y(P(u) \wedge P(y) \Rightarrow u = y)$	$\forall$I 12
14	$\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$	copie de 13
15	donc $(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y)) \Rightarrow \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$	$\Rightarrow$I 1, 13
16	$\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$	$\exists$E i, 14

Conclusion

Comme on peut le voir sur l'exemple précédent, toute la difficulté des preuves est concentrée autour des règles $\forall$E et $\exists$I :

- dans le raisonnement en avant, il faut trouver les bonnes instanciations des formules commençant par un quantificateur existentiel
- dans le raisonnement en arrière, il faut trouver la bonne instance permettant de déduire une formule commençant par un quantificateur universel

Plan

Introduction

Nous allons maintenant démontrer la cohérence du système.

Nous rappelons que d'admettons sans preuve la complétude du système.

Rappel

Cette preuve va utiliser deux résultats vu dans la première partie du cours sur la logique du premier ordre :

théorème 1

Soit A une formule et t un terme libre pour la variable x dans A . Soit I une interprétation et e un état de l'interprétation. Nous avons : $[A < x := t >]_{Ie} = [A]_{Ie[x=d]}$ où $d = [[t]]_{Ie}$.

corollaire 1

Soit A une formule et t un terme libre pour x dans A.
Les formules $\forall xA \Rightarrow A < x := t >$ et $A < x := t > \Rightarrow \exists xA$ sont valides.

Propriétés de la conséquence

Cette preuve va aussi utiliser les deux propriétés suivantes que nous allons démontrer :

propriété 1

Soit Γ un ensemble de formules, x une variable et A une formule.
Supposons que x n'est pas libre dans Γ, alors on a :
$\Gamma \models A$ si et seulement si $\Gamma \models \forall x A$

propriété 2

Soit Γ un ensemble de formules, x une variable, A et B deux formules.
Supposons que x n'est libre ni dans Γ, ni dans B, alors on a :
$\Gamma \models A \Rightarrow B$ si et seulement si $\Gamma \models (\exists x A) \Rightarrow B$

Preuve de la propriété 1

$\Rightarrow$ Supposons que $\Gamma \models A$.

Soit I une interprétation et e un état tels que Ie est modèle de Γ. Puisque x n'est pas libre dans Γ, pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x, If et Ie donnent la même valeur aux formules de Γ, donc If est modèle de Γ.
Puisque $\Gamma \models A$, pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x, If est modèle de A, donc Ie est modèle de $\forall x A$.

Preuve de la propriété 1

$\Rightarrow$ Supposons que $\Gamma \models A$.

Soit I une interprétation et e un état tels que Ie est modèle de Γ.
Puisque x n'est pas libre dans Γ, pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x, If et Ie donnent la même valeur aux formules de Γ, donc If est modèle de Γ.
Puisque $\Gamma \models A$, pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x, If est modèle de A, donc Ie est modèle de $\forall xA$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\Gamma \models \forall xA$.

Puisque la formule $\forall xA \Rightarrow A$ est valide (d'après le corollaire 1), on a $\Gamma \models A$

Preuve de la propriété 2

$\Rightarrow$ Supposons que $\Gamma \models A \Rightarrow B$.

Soit I une interprétation et e un état tels que Ie est modèle de Γ.
Puisque x n'est pas libre dans Γ, pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x, If et Ie donnent la même valeur aux formules de Γ, donc If est modèle de Γ.
Puisque $\Gamma \models A \Rightarrow B$, pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x, If est modèle de $A \Rightarrow B$. Supposons que Ie est modèle de $\exists x A$, il existe g identique à e sauf pour la valeur de x tel que Ig est modèle de A.
Puisque pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x, If est modèle de $A \Rightarrow B$, alors Ig est modèle de B.
Puisque x n'est pas libre dans B, Ie est modèle de B.

Preuve de la propriété 2

$\Rightarrow$ Supposons que $\Gamma \models A \Rightarrow B$.

Soit I une interprétation et e un état tels que Ie est modèle de Γ.
Puisque x n'est pas libre dans Γ, pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x, If et Ie donnent la même valeur aux formules de Γ, donc If est modèle de Γ.
Puisque $\Gamma \models A \Rightarrow B$, pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x, If est modèle de $A \Rightarrow B$. Supposons que Ie est modèle de $\exists xA$, il existe g identique à e sauf pour la valeur de x tel que Ig est modèle de A.
Puisque pour tout état f identique à e sauf pour la valeur de x, If est modèle de $A \Rightarrow B$, alors Ig est modèle de B.
Puisque x n'est pas libre dans B, Ie est modèle de B.

$\Leftarrow$ Supposons que $\Gamma \models (\exists xA) \Rightarrow B$.

Puisque la formule $A \Rightarrow (\exists xA)$ est valide (d'après le corollaire 1), on a $\Gamma \models A \Rightarrow B$.

Plan de la preuve de cohérence

On prouve maintenant la cohérence : si une formule est déduite d'un environnement de formules alors elle en est une conséquence.

Plan de la preuve de cohérence

On prouve maintenant la cohérence : si une formule est déduite d'un environnement de formules alors elle en est une conséquence.

Soit Γ un ensemble de formules. Soit P une preuve de A dans cet environnement.
Soit C_i la conclusion et H_i le contexte de la i-ème ligne de la preuve P.
Rappelons que les lignes d'une preuve sont numérotées à partir de 1 et que H_0 est la liste vide.
Notons par Γ, H_i l'ensemble des formules de l'ensemble Γ et de la liste H_i.

Plan de la preuve de cohérence

On prouve maintenant la cohérence : si une formule est déduite d'un environnement de formules alors elle en est une conséquence.

Soit Γ un ensemble de formules. Soit P une preuve de A dans cet environnement.
Soit C_i la conclusion et H_i le contexte de la i-ème ligne de la preuve P.
Rappelons que les lignes d'une preuve sont numérotées à partir de 1 et que H_0 est la liste vide.
Notons par Γ, H_i l'ensemble des formules de l'ensemble Γ et de la liste H_i.

HR : Supposons que pour tout i où $0 < i < k$, $\Gamma, H_i \models C_i$.

Montrons que, pour $0 < k$, $\Gamma, H_k \models C_k$.

Plan de la preuve de cohérence

On prouve maintenant la cohérence : si une formule est déduite d'un environnement de formules alors elle en est une conséquence.

Soit Γ un ensemble de formules. Soit P une preuve de A dans cet environnement.
Soit C_i la conclusion et H_i le contexte de la i-ème ligne de la preuve P.
Rappelons que les lignes d'une preuve sont numérotées à partir de 1 et que H_0 est la liste vide.
Notons par Γ, H_i l'ensemble des formules de l'ensemble Γ et de la liste H_i.

HR : Supposons que pour tout i où $0 < i < k$, $\Gamma, H_i \models C_i$.

Montrons que, pour $0 < k$, $\Gamma, H_k \models C_k$.

On examine uniquement le cas des nouvelles règles et pour simplifier on ne fait pas de distinctions entre deux formules égales aux abréviations près de la négation et de l'équivalence.

La règle $\forall$I

Supposons que $C_k = \forall x A$ et que cette ligne a été déduite, par la règle $\forall$I, de la formule A avec $A = C_i$ et $0 < i < k$ ou $A \in \Gamma$.

Si $A = C_i$ et $0 < i < k$, **par hypothèse de récurrence** on a, $\Gamma, H_i \models A$.
Si $A \in \Gamma$ alors $\Gamma \models A$.
Puisque H_0 est la liste vide, il existe i où $0 \leq i < k$ tel que $\Gamma, H_i \models A$.

D'après les conditions d'application de la règle, x n'est pas libre dans Γ, H_i.
Donc, **d'après la propriété 1**, on a aussi $\Gamma, H_i \models \forall x A$.

Puisque la ligne i est utilisable sur la ligne $k-1$ et que H_0 est la liste vide, H_i est préfixe de H_{k-1}.
Puisque le contexte n'est pas modifié par la ligne k, on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models C_k$. $\square$

La règle $\forall$E

Supposons que $C_k = A < x := t >$ et que cette ligne a été déduite, par la règle $\forall$E, de la formule $\forall x A$ avec $\forall x A = C_i$ et $0 < i < k$ ou $\forall x A \in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce que H_O est la liste vide, il existe i où $0 \leq i < k$ tel que $\Gamma, H_i \models \forall x A$

D'après les conditions d'applications de la règle, le terme t est libre pour la variable x dans la formule A.
Donc, **d'après le corollaire 1**, la formule $\forall x A \Rightarrow A < x := t >$ est valide et par suite $\Gamma, H_i \models A < x := t >$.

Puisque la ligne i est utilisable sur la ligne $k - 1$, et que H_0 est la liste vide, H_i est préfixe de H_{k-1}.
Puisque le contexte n'est pas modifié par la ligne k, on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models C_k$. $\square$

La règle ∃I

Supposons que $C_k = \exists x A$ et que cette ligne a été déduite, par la règle ∃I, de la formule $A < x := t >$ avec $A < x := t >= C_i$ et $0 < i < k$ ou $A < x := t > \in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce H_0 est la liste vide, il existe i où $0 \leq i < k$ tel que $\Gamma, H_i \models A < x := t >$

D'après les conditions d'applications de la règle, le terme t est libre pour la variable x dans la formule A.
Donc, **d'après le corollaire 1**, la formule $A < x := t > \Rightarrow \exists x A$ est valide et par suite $\Gamma, H_i \models \exists x A$.

Puisque la ligne i est utilisable sur la ligne $k-1$, et que H_0 est la liste vide, H_i est préfixe de H_{k-1}.
Puisque le contexte n'est pas modifié par la ligne k, on a on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models C_k$. □

La règle ∃E

Supposons que $C_k = B$ et que cette formule a été déduite, par la règle ∃E, de la formule $\exists x A$ avec $\exists x A = C_i$ et $0 < i < k$ ou $\exists x A \in \Gamma$ et de la formule $A \Rightarrow B$ avec $A \Rightarrow B = C_j$ et $0 < j < k$ ou $A \Rightarrow B \in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce H_0 est la liste vide, il existe i et j tels que $0 \leq i < k$, $0 \leq j < k$, $\Gamma, H_i \models \exists x A$ et $\Gamma, H_j \models A \Rightarrow B$.

D'après les conditions d'application de la règle, x n'est libre ni dans Γ, H_j, ni dans B
Donc, **d'après la propriété 1**, on a aussi $\Gamma, H_j \models (\exists x A) \Rightarrow B$.

Puisque les lignes i et j sont utilisables sur la ligne $k - 1$, et que H_0 est la liste vide, H_i et H_j sont préfixes de H_{k-1}.
Puisque le contexte n'est pas modifie par la ligne k, on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models \exists x A$ et $\Gamma, H_k \models (\exists x A) \Rightarrow B$.
Par suite $\Gamma, H_k \models C_k$. □

Réflexivité

Supposons que $C_k = (t = t)$.

Puisque cette formule est valide (dans le sens attribué à l'égalité), $\Gamma, H_k \models C_k$. $\square$

Congruence

Supposons que $C_k = A < x := t >$ et que cette ligne a été déduite, par la règle de congruence, de la formule $s = t$ avec $(s = t) = C_i$ et $0 < i < k$ ou $(s = t) \in \Gamma$ et de la formule $A < x := s >$ avec $A < x := s >= C_j$ et $0 < j < k$ ou $A < x := s > \in \Gamma$.

Par hypothèse de récurrence ou parce H_0 est la liste vide, il existe i et j tels que $0 \leq i < k$, $0 \leq j < k$, $\Gamma, H_i \models (s = t)$ et $\Gamma, H_j \models A < x := s >$.

Puisque les lignes i et j sont utilisables sur la ligne $k - 1$, et que H_0 est la liste vide, H_i et H_j sont préfixes de H_{k-1}.
Puisque le contexte n'est pas modifie par la ligne k, on a $H_{k-1} = H_k$, donc $\Gamma, H_k \models (s = t)$ et $\Gamma, H_k \models A < x := s >$.
D'après le théorème 1 et les conditions d'application de la règle, on a : $s = t, A < x := s > \models A < x := t >$
Par suite $\Gamma, H_k \models C_k$. $\square$