Logique du premier ordre
Première partie

Stéphane Devismes Pascal Lafourcade Michel Lévy

Université Joseph Fourier, Grenoble I

25 novembre 2008

Plan

Plan

Usage

La logique du premier ordre permet de modéliser des structures comportant :

- **un seul** *domaine*,
- des *fonctions* sur le domaine, et
- des relations sur le domaine.

Structure de la logique du premier ordre

Deux catégories :

- les termes qui dénotent des éléments du domaine, et
- les formules qui décrivent des propriétés des relations et des fonctions.

Structure de la logique du premier ordre

Deux catégories :

- les termes qui dénotent des éléments du domaine, et
- les formules qui décrivent des propriétés des relations et des fonctions.

Exemples :

- le terme $pere(x)$ désigne le père de x,
- la formule $\forall x \exists y\ parent(y, x)$ indique que tout individu a un parent.

Plan

Vocabulaire

Pour écrire **les formules**, on dispose du vocabulaire suivant :

Vocabulaire

Pour écrire **les formules**, on dispose du vocabulaire suivant :

1. les variables : suite de lettres et de chiffres commençant par une des minuscules u,v,w,x,y,z. **Par exemple**, $x, x1, x2, y$ sont des variables

Vocabulaire

Pour écrire **les formules**, on dispose du vocabulaire suivant :

1. les variables : suite de lettres et de chiffres commençant par une des minuscules u,v,w,x,y,z. **Par exemple**, $x, x1, x2, y$ sont des variables
2. les symboles ordinaires : suite de lettres et de chiffres ne commençant pas par une des minuscules u,v,w,x,y,z

Vocabulaire

Pour écrire **les formules**, on dispose du vocabulaire suivant :

1. les variables : suite de lettres et de chiffres commençant par une des minuscules u,v,w,x,y,z. **Par exemple**, $x, x1, x2, y$ sont des variables
2. les symboles ordinaires : suite de lettres et de chiffres ne commençant pas par une des minuscules u,v,w,x,y,z
3. les symboles spéciaux : $+, -, *, /, =, \neq, <, \leq, >, \geq, \ldots$

Vocabulaire

Pour écrire **les formules**, on dispose du vocabulaire suivant :

1. les variables : suite de lettres et de chiffres commençant par une des minuscules u,v,w,x,y,z. **Par exemple**, $x, x1, x2, y$ sont des variables
2. les symboles ordinaires : suite de lettres et de chiffres ne commençant pas par une des minuscules u,v,w,x,y,z
3. les symboles spéciaux : $+, -, *, /, =, \neq, <, \leq, >, \geq, \ldots$
4. les ponctuations : la virgule et les parenthèses

Vocabulaire

Pour écrire **les formules**, on dispose du vocabulaire suivant :

1. les variables : suite de lettres et de chiffres commençant par une des minuscules u,v,w,x,y,z. **Par exemple**, $x, x1, x2, y$ sont des variables
2. les symboles ordinaires : suite de lettres et de chiffres ne commençant pas par une des minuscules u,v,w,x,y,z
3. les symboles spéciaux : $+, -, *, /, =, \neq, <, \leq, >, \geq, \ldots$
4. les ponctuations : la virgule et les parenthèses
5. les connectives $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Vocabulaire

Pour écrire **les formules**, on dispose du vocabulaire suivant :

1. les variables : suite de lettres et de chiffres commençant par une des minuscules u,v,w,x,y,z. **Par exemple**, $x, x1, x2, y$ sont des variables
2. les symboles ordinaires : suite de lettres et de chiffres ne commençant pas par une des minuscules u,v,w,x,y,z
3. les symboles spéciaux : $+, -, *, /, =, \neq, <, \leq, >, \geq, \ldots$
4. les ponctuations : la virgule et les parenthèses
5. les connectives $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
6. le quantificateur universel $\forall$

Vocabulaire

Pour écrire **les formules**, on dispose du vocabulaire suivant :

1. les variables : suite de lettres et de chiffres commençant par une des minuscules u,v,w,x,y,z. **Par exemple**, $x, x1, x2, y$ sont des variables
2. les symboles ordinaires : suite de lettres et de chiffres ne commençant pas par une des minuscules u,v,w,x,y,z
3. les symboles spéciaux : $+, -, *, /, =, \neq, <, \leq, >, \geq, \ldots$
4. les ponctuations : la virgule et les parenthèses
5. les connectives $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
6. le quantificateur universel $\forall$
7. le quantificateur existentiel $\exists$

Vocabulaire

Pour écrire **les formules**, on dispose du vocabulaire suivant :

1. les variables : suite de lettres et de chiffres commençant par une des minuscules u,v,w,x,y,z. **Par exemple**, $x, x1, x2, y$ sont des variables
2. les symboles ordinaires : suite de lettres et de chiffres ne commençant pas par une des minuscules u,v,w,x,y,z
3. les symboles spéciaux : $+, -, *, /, =, \neq, <, \leq, >, \geq, \ldots$
4. les ponctuations : la virgule et les parenthèses
5. les connectives $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
6. le quantificateur universel $\forall$
7. le quantificateur existentiel $\exists$

Remarque : un symbole est un symbole *ordinaire* ou *spécial*

Terme

- **un symbole ordinaire** ou **une variable** est un terme
- si $t_1, \ldots t_n$ sont **des termes** et si s est **un symbole** alors $\boldsymbol{s(t_1, \ldots t_n)}$ est un terme

Terme

- **un symbole ordinaire** ou **une variable** est un terme
- si $t_1, \ldots t_n$ sont **des termes** et si s est **un symbole** alors $\boldsymbol{s(t_1, \ldots t_n)}$ est un terme

Exemples :

- La variable x,
- Le symbole ordinaire a,
- $f(x1, x2, g(y))$
- $+(x, *(y, z))$.

Formule atomique

- $\top$ et $\bot$ sont des formules atomiques
- **un symbole ordinaire** est une formule atomique
- si $t_1, \ldots t_n$ sont **des termes** et si s est **un symbole** alors $s(t_1, \ldots t_n)$ est une formule atomique

Formule atomique

- $\top$ et $\bot$ sont des formules atomiques
- **un symbole ordinaire** est une formule atomique
- si $t_1, \ldots t_n$ sont **des termes** et si s est **un symbole** alors $s(t_1, \ldots t_n)$ est une formule atomique

Exemples :

- x **n'est pas** une formule atomique
- a, $f(x1, x2, g(y))$ et $+(x, *(y, z))$ **sont** des formules atomiques

Formule (stricte)

- **une formule atomique** est une formule
- si A est **une formule** alors $\neg A$ est une formule
- si A et B sont **des formules** et si $\circ$ est **une des opérations** $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ alors $(A \circ B)$ est une formule
- si A est **une formule** et si x **une variable** *quelconque* alors $\forall x\ A$ et $\exists x\ A$ sont des formules

Formule (stricte)

- **une formule atomique** est une formule
- si A est **une formule** alors $\neg A$ est une formule
- si A et B sont **des formules** et si $\circ$ est **une des opérations** $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ alors $(A \circ B)$ est une formule
- si A est **une formule** et si x **une variable** *quelconque* alors $\forall x\ A$ et $\exists x\ A$ sont des formules

Parmi ces expressions, lesquelles sont des formules strictes :

- x
- a
- $(a(x) \Rightarrow b) \wedge a(x) \Rightarrow b$
- $\exists x((\bot \Rightarrow a(x)) \wedge b(x))$
- $\exists x \exists y < (-(x, y), +(a, y))$
- $((a < b) \Rightarrow ((2 * b) > (2 * a)))$

Plan

Abréger l'écriture des termes

Dans **une formule à priorité**, on pourra écrire les symboles de fonctions $+, -, *, /$ de la manière usuelle.

- On **abrège** le terme $+(x, *(y, z))$ en $x + y * z$
- **La transformation inverse** est défini en donnant des priorités aux symboles $+, -, *, /$

Abréger l'écriture des formules atomiques

Dans **une formule à priorité**, on pourra écrire les symboles de relations de la manière usuelle.

- On **abrège** la formule atomique $\leq (*(3,x),+(y,5))$ en $3*x \leq y+5$
- **La transformation inverse** est défini en donnant aux symboles $=,\neq,<,\leq,>,\geq$ des priorités inférieures à celle des symboles $+,-,*,/$

Tableau récapitulatif des priorités

De même, on décide que les connectives sont moins prioritaires que les relations et que la priorité des quantificateurs est identique à celle de la négation.

On obtient le tableau suivant où les priorités sont décroissantes du haut vers le bas :

opérations	
$-+$ unaire	
$*, /$	associatif gauche
$+, -$ binaire	associatif gauche
relations	
$=, \neq, <, \leq, >, \geq$	
négation, quantificateurs	
$\neg, \forall, \exists$	
connectives binaires	
$\wedge$	associatif gauche
$\vee$	associatif gauche
$\Rightarrow$	associatif droit
$\Leftrightarrow$	associatif gauche

Formule à priorités

- A est **une formule à priorité** alors $\neg A$ est une formule à priorité
- si A et B sont **des formules à priorité** alors $A \circ B$ est une formule à priorité
- si x est **une variable** et A **une formule à priorité** alors $\forall x \; A$ et $\exists x \; A$ sont des formules à priorité
- si A est **une formule à priorité** alors (A) est une formule à priorité

Exemples et représention arbre

- $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ est une *abréviation* de $((\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x)))$

Exemples et représention arbre

- $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ est une *abréviation* de $((\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x)))$
- $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ est une *abréviation* de ?

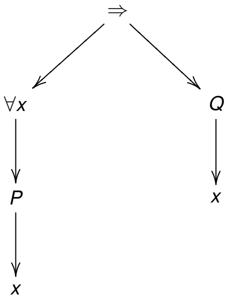
Exemples et représention arbre

- $\forall x P(x) \land \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \land Q(x))$ est une *abréviation* de $((\forall x P(x) \land \forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \land Q(x)))$
- $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \land y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ est une *abréviation* de $\forall x \forall y \forall z((\leq (x,y) \land \leq (y,z)) \Rightarrow \leq (x,z))$

Exemples et représention arbre

- $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$ est une *abréviation* de $((\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x)))$
- $\forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ est une *abréviation* de $\forall x \forall y \forall z ((\leq (x, y) \wedge \leq (y, z)) \Rightarrow \leq (x, z))$

Remarque : Dans $\forall x P(x) \Rightarrow Q(x)$, l'opérande gauche de l'implication est $\forall x P(x)$. D'où la représentation en arbre :



Plan

Idée

- Le sens de la formule $x + 2 = 4$ dépend de x : x est libre dans cette formule

Idée

- Le sens de la formule $x+2=4$ dépend de x : x est libre dans cette formule
- La formule $\forall x(x+2=4)$ est *fausse* et la formule $\forall x \forall y(x+y=y+x)$ est *vraie* indépendamment des valeurs de de x et y : ces deux formules n'ont pas de variables libres

Occurences libres et liées

Soit x une variable et A une formule. Dans une formule $\forall x\ A$ ou $\exists x\ A$, la portée de la liaison pour x est A.

Occurences libres et liées

Soit x une variable et A une formule. Dans une formule $\forall x\ A$ ou $\exists x\ A$, la portée de la liaison pour x est A.

Une occurrence de x dans une formule est libre si elle n'est pas dans la portée d'une liaison pour x.

Occurences libres et liées

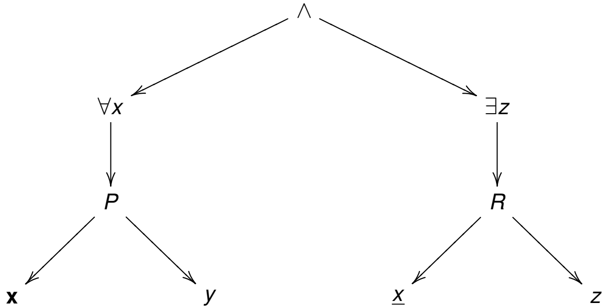
Soit x une variable et A une formule. Dans une formule $\forall x\ A$ ou $\exists x\ A$, la portée de la liaison pour x est A.

Une occurrence de x dans une formule est libre si elle n'est pas dans la portée d'une liaison pour x.

Pour voir les occurrences des variables, on dessine l'arbre de formule en faisant apparaître $\forall x$ et $\exists x$ comme des sommets de ces structures.

Exemple

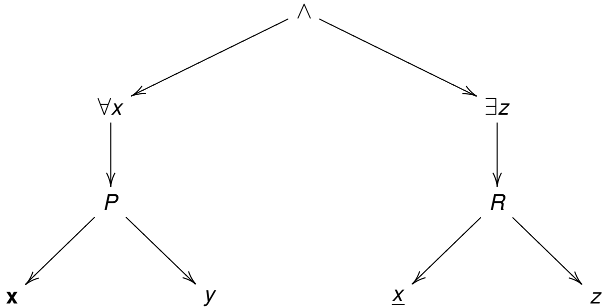
La formule $\forall x P(\mathbf{x}, y) \wedge \exists z R(\underline{x}, z)$ donne l'arbre suivant :



Sur ce type de structure, une occurrence liée de la variable x c'est une occurence en dessous d'un sommet $\exists x$ ou $\forall x$. Une occurrence de x qui n'est pas sous un tel sommet est libre.

Exemple

La formule $\forall x P(\mathbf{x}, y) \wedge \exists z R(\underline{x}, z)$ donne l'arbre suivant :



Sur ce type de structure, une occurrence liée de la variable x c'est une occurence en dessous d'un sommet $\exists x$ ou $\forall x$. Une occurrence de x qui n'est pas sous un tel sommet est libre.

Dans l'exemple, l'occurrence en gras de x est liée, l'occurrence soulignée de x est libre. L'occurrence de z est liée.

Variables libres et liées

La variable x est une variable libre d'une formule si et seulement si il y a **une occurrence libre de** x dans la formule.

Variables libres et liées

La variable x est une variable libre d'une formule si et seulement si il y a **une occurrence libre de** x dans la formule.

Dans l'exemple précédent, la formule a comme variables libres x et y.

Variables libres et liées

La variable x est une variable libre d'une formule si et seulement si il y a **une occurrence libre de** x dans la formule.

Dans l'exemple précédent, la formule a comme variables libres x et y.

Une formule sans variable libre est aussi appelée une formule fermée.

Plan

Déclaration de symbole

Une déclaration de symbole est un triplet noté s^{gn} où :

- s est un symbole
- g une des lettres f (signifiant fonction) ou r (signifiant relation)
- n est un entier naturel.

Déclaration de symbole

Une déclaration de symbole est un triplet noté s^{gn} où :

- s est un symbole
- g une des lettres f (signifiant fonction) ou r (signifiant relation)
- n est un entier naturel.

Exemples :

- $parent^{r2}$ est une déclaration annonçant que parent est employé comme **relation** (**r**) avec **2** arguments
- $*^{f2}$ est une déclaration annonçant que $*$ va être employé comme **fonction** (**f**) avec **2** arguments

Déclaration de symbole

Une déclaration de symbole est un triplet noté s^{gn} où :

- s est un symbole
- g une des lettres f (signifiant fonction) ou r (signifiant relation)
- n est un entier naturel.

Exemples :

- $parent^{r2}$ est une déclaration annonçant que parent est employé comme **relation** (**r**) avec **2** arguments
- $*^{f2}$ est une déclaration annonçant que $*$ va être employé comme **fonction** (**f**) avec **2** arguments

Remarque : si le contexte ou les conventions comporte une déclaration implicite d'un symbole, on omet l'exposant. *E.g*, le **égal** est toujours une relation à 2 arguments, on abrége la déclation $=^{r2}$ en $=$.

Interprétation

Une interprétation I comporte **un domaine** D **non vide** et **une application** qui à chaque déclaration de symbole s^{gn} associe sa valeur s_I^{gn} :

1. s_I^{f0} est un élément de D.
2. s_I^{fn} où $n \geq 1$ est une fonction de D^n dans D.
3. s_I^{r0} vaut 0 ou 1.
4. s_I^{rn} où $n \geq 1$ est un sous-ensemble de D^n, autrement dit une relation à n arguments

Egalité

Dans toute interprétation I, la valeur du symbole $=$ est l'ensemble $\{(d, d) \mid d \in D\}$

Autrement dit dans toute interprétation le sens de l'égalité est l'identité sur le domaine de l'interprétation.

Etat

Un état *e* d'**une interprétation** est une application de l'ensemble des variables dans le domaine de l'interprétation.

Etat

Un état *e* d'**une interprétation** est une application de l'ensemble des variables dans le domaine de l'interprétation.

Pour connaître la valeur d'une formule sans variable libre, il suffit de donner une interprétation des symboles de la formule.

Etat

Un état e d'**une interprétation** est une application de l'ensemble des variables dans le domaine de l'interprétation.

Pour connaître la valeur d'une formule sans variable libre, il suffit de donner une interprétation des symboles de la formule.

Pour connaitre la valeur d'une formule avec des variables libres on a donc besoin d'un couple Ie composé d'une **interprétation** et d'un **état**. On appelle un tel couple une assignation.

Plan

Notation

Soit I une interprétation de domaine D et e un état de cette interprétation.

On note $[[t]]_{Ie}$ la valeur d'un terme t dans l'assignation Ie : cette valeur est élément de D.

On note $[A]_{Ie}$ la valeur d'une formule A dans l'assignation Ie : cette valeur est 0 ou 1.

Sens des termes

Pour évaluer un terme :

- on remplace les variables par leurs valeurs
- les symboles de fonctions par les fonctions qui leur sont associées
- on applique les fonctions

Sens des termes

Pour évaluer un terme :

- on remplace les variables par leurs valeurs
- les symboles de fonctions par les fonctions qui leur sont associées
- on applique les fonctions

Formellement :

1. si t est une variable, alors $[[t]]_{Ie} = e(t)$
2. si t est un symbole alors $[[t]]_{Ie} = t_I^{f0}$
3. si $t = s(t_1, \ldots, t_n)$ où s est un symbole et $t_1, \ldots t_n$ sont des termes, alors $[[t]]_{Ie} = s_I^{fn}([[t_1]]_{Ie}, \ldots [[t_n]]_{Ie})$

Sens des termes

Pour évaluer un terme :

- on remplace les variables par leurs valeurs
- les symboles de fonctions par les fonctions qui leur sont associées
- on applique les fonctions

Formellement :

1. si t est une variable, alors $[[t]]_{Ie} = e(t)$
2. si t est un symbole alors $[[t]]_{Ie} = t_I^{f0}$
3. si $t = s(t_1, \ldots, t_n)$ où s est un symbole et $t_1, \ldots t_n$ sont des termes, alors $[[t]]_{Ie} = s_I^{fn}([[t_1]]_{Ie}, \ldots [[t_n]]_{Ie})$

Exemple : soit I l'interprétation dont le domaine est $\mathbb{N}$ et donnant aux déclarations de symboles $1^{f0}, *^{f2}, +^{f2}$ leur sens usuel sur les entiers. Soit e l'état tel que $x = 2, y = 3$, calculons $[[x * (y+1)]]_{Ie}$.

Sens des termes

Pour évaluer un terme :

- on remplace les variables par leurs valeurs
- les symboles de fonctions par les fonctions qui leur sont associées
- on applique les fonctions

Formellement :

1. si t est une variable, alors $[[t]]_{Ie} = e(t)$
2. si t est un symbole alors $[[t]]_{Ie} = t_I^{f0}$
3. si $t = s(t_1, \ldots, t_n)$ où s est un symbole et $t_1, \ldots t_n$ sont des termes, alors $[[t]]_{Ie} = s_I^{fn}([[t_1]]_{Ie}, \ldots [[t_n]]_{Ie})$

Exemple : soit I l'interprétation dont le domaine est $\mathbb{N}$ et donnant aux déclarations de symboles $1^{f0}, *^{f2}, +^{f2}$ leur sens usuel sur les entiers. Soit e l'état tel que $x = 2, y = 3$, calculons $[[x * (y + 1)]]_{Ie}$.

On obtient $[[x * (y + 1)]]_{Ie} = 2 * (3 + 1) = 8$

Sens des formules atomiques

1. $[\top]_{Ie} = 1, [\bot]_{Ie} = 0$.
   Dans les exemples, on autorise de remplacer $\top$ par 1 et $\bot$ par 0.
2. Soit s un symbole, $[s]_{Ie} = s_I^{r0}$
3. Soit $A = s(t_1, \ldots, t_n)$ où s est un symbole et $t_1, \ldots t_n$ sont des termes.
   Si $([[t_1]]_{Ie}, \ldots [[t_n]]_{Ie}) \in s_I^{rn}$ alors $[A]_{Ie} = 1$ sinon $[A]_{Ie} = 0$

Sens des formules atomiques

1. $[\top]_{le} = 1, [\bot]_{le} = 0$.
   Dans les exemples, on autorise de remplacer $\top$ par 1 et $\bot$ par 0.
2. Soit s un symbole, $[s]_{le} = s_l^{r0}$
3. Soit $A = s(t_1, \dots, t_n)$ où s est un symbole et $t_1, \dots t_n$ sont des termes.
   Si $([[t_1]]_{le}, \dots [[t_n]]_{le}) \in s_l^{rn}$ alors $[A]_{le} = 1$ sinon $[A]_{le} = 0$

On doit distinguer entre évaluer un terme et évaluer une formule atomique, car, dans notre présentation, ces deux catégories syntaxiques ne sont pas disjointes. Mais quand le contexte est sans ambiguité, on peut omettre cette distinction.

Exemple

Soit I l'interprétation de domaine $D = \{0, 1, 2\}$ avec

- $anne_I^{f0} = 0, bernard_I^{f0} = 1, claude_I^{f0} = 2$
  Les prénoms anne, bernard, claude dénotent des élément du domaine D.
- $a_I^{r2} = \{(0,1), (1,0), (2,0)\}$
  La lettre a dénote une relation à deux arguments, et on peut lire $a(x, y)$ comme x aime y.
- $c_I^{f1}(0) = 1, c_I^{f1}(1) = 0, c_I^{f1}(2) = 2$
  La lettre c dénote une fonction à un argument, et on peut lire $c(x)$ comme le copain ou la copine de x. Notons que la fonction c_I^{f1} a comme domaine D, ce qui oblige à définir artificiellement $c_I^{f1}(2)$, alors que claude, qui dénote 2, n'a ni copain, ni copine.

Exemple

Soit I l'interprétation de domaine $D = \{0, 1, 2\}$ avec

- $anne_I^{f0} = 0, bernard_I^{f0} = 1, claude_I^{f0} = 2$
  Les prénoms anne, bernard, claude dénotent des élément du domaine D.
- $a_I^{r2} = \{(0,1), (1,0), (2,0)\}$
  La lettre a dénote une relation à deux arguments, et on peut lire $a(x, y)$ comme x aime y.
- $c_I^{f1}(0) = 1, c_I^{f1}(1) = 0, c_I^{f1}(2) = 2$
  La lettre c dénote une fonction à un argument, et on peut lire $c(x)$ comme le copain ou la copine de x. Notons que la fonction c_I^{f1} a comme domaine D, ce qui oblige à définir artificiellement $c_I^{f1}(2)$, alors que claude, qui dénote 2, n'a ni copain, ni copine.

Exercice :

- Donnez les valeurs de $a(anne, bernard)$ et $a(anne, claude)$ dans l'interpretation I
- Donnez les valeurs de $a(x, c(x))$ et $a(y, c(y))$ pour l'assignation Ie avec e l'état $x = 0, y = 2$.
- Donnez les valeurs de $(anne = bernard)$, $(c(anne) = anne)$ et $(c(c(anne)) = anne)$ dans l'interprétation I.

Exemple

Dans l'interprétation I, on a :

- $a(anne, bernard) = a(0,1) = 1$ car $(0,1) \in a_I^{r2}$
- $a(anne, claude) = a(0,2) = 0$ car $(0,2) \notin a_I^{r2}$

Soit e l'état $x = 0, y = 2$. Dans l'assignation Ie, on a :

- $a(x, c(x)) = a(0, c(0)) = a(0,1) = 1$
- $a(y, c(y)) = a(2, c(2)) = a(2,2) = 0$ car $(2,2) \notin a_I^{r2}$

Dans l'interprétation I, on a :

- $(anne = bernard) = (0 = 1) = 0$
- $(c(anne) = anne) = (c(0) = 0) = (1 = 0) = 0$
- $(c(c(anne)) = anne) = (c(c(0)) = 0) = (0 = 0) = 1$

Sens des formules

1. Les connectives propositionnelles ont le même sens qu'en logique propositionnelle.
   Exemple : Soient B et C des formules. si $[B]_{Ie} = 0$ alors $[(B \Rightarrow C)]_{Ie} = 1$ sinon $[(B \Rightarrow C)]_{Ie} = [C]_{Ie}$

Sens des formules

1. Les connectives propositionnelles ont le même sens qu'en logique propositionnelle.
   Exemple : Soient B et C des formules. si $[B]_{Ie} = 0$ alors $[(B \Rightarrow C)]_{Ie} = 1$ sinon $[(B \Rightarrow C)]_{Ie} = [C]_{Ie}$
2. Soit x une variable et B une formule. $[\forall x B]_{Ie} = 1$ si et seulement si $[B]_{If} = 1$ pour tout état f identique à e, sauf pour x.
   Soit $d \in D$. Notons $e[x = d]$ l'état identique à l'état e, sauf pour la variable x, auquel l'état $e[x = d]$ associe la valeur d.
   La définition ci-dessus peut être mise sous la forme suivante :
   $[\forall x B]_{Ie} = \prod_{d \in D} [B]_{Ie[x=d]}$ où le produit est **le produit booléen**

Sens des formules

1. Les connectives propositionnelles ont le même sens qu'en logique propositionnelle.
   Exemple : Soient B et C des formules. si $[B]_{Ie} = 0$ alors $[(B \Rightarrow C)]_{Ie} = 1$ sinon $[(B \Rightarrow C)]_{Ie} = [C]_{Ie}$
2. Soit x une variable et B une formule. $[\forall x B]_{Ie} = 1$ si et seulement si $[B]_{If} = 1$ pour tout état f identique à e, sauf pour x.
   Soit $d \in D$. Notons $e[x = d]$ l'état identique à l'état e, sauf pour la variable x, auquel l'état $e[x = d]$ associe la valeur d.
   La définition ci-dessus peut être mise sous la forme suivante :
   $[\forall x B]_{Ie} = \prod_{d \in D} [B]_{Ie[x=d]}$ où le produit est **le produit booléen**
3. $[\exists x B]_{Ie} = 1$ si et seulement si il y a un état f identique à e, sauf pour x, tel que $[B]_{If} = 1$.
   La définition ci-dessus peut être mise sous la forme suivante :
   $[\exists x B]_{Ie} = \sum_{d \in D} [B]_{Ie[x=d]}$ où la somme est **la somme booléenne**

Exercice

Etant donné l'interprétation I défini précédemment. Evaluer :

- $\exists x \; a(x, x)$
- $\forall x \exists y \; a(x, y)$
- $\exists y \forall x \; a(x, y)$

Exercice

- $\exists x\ a(x,x) = a(0,0) + a(1,1) + a(2,2) = 0$ car $(0,0),(1,1),(2,2) \notin a^{r2}$
- $\forall x \exists y\ a(x,y) = \exists y\ a(0,y).\exists y\ a(1,y).\exists y\ a(2,y) = (a(0,0)+a(0,1)+a(0,2)).(a(1,0)+a(1,1)+a(1,2)).(a(2,0)+a(2,1)+a(2,2)) = (0+1+0)(1+0+0)(1+0+0) = 1$
- $\exists y \forall x\ a(x,y) = \forall x\ a(0,x) + \forall x\ a(1,x) + \forall x\ a(2,x) = a(0,0).a(0,1).a(0,2) + a(1,0).a(1,1).a(1,2) + a(2,0).a(2,1).a(2,2) = 0.1.0 + 1.0.0 + 1.0.0 = 0$

Exercice

- $\exists x\ a(x,x) = a(0,0) + a(1,1) + a(2,2) = 0$ car $(0,0),(1,1),(2,2) \notin a^{r2}$
- $\forall x \exists y\ a(x,y) = \exists y\ a(0,y).\exists y\ a(1,y).\exists y\ a(2,y) = (a(0,0)+a(0,1)+a(0,2)).(a(1,0)+a(1,1)+a(1,2)).(a(2,0)+a(2,1)+a(2,2)) = (0+1+0)(1+0+0)(1+0+0) = 1$
- $\exists y \forall x\ a(x,y) = \forall x\ a(0,x) + \forall x\ a(1,x) + \forall x\ a(2,x) = a(0,0).a(0,1).a(0,2) + a(1,0).a(1,1).a(1,2) + a(2,0).a(2,1).a(2,2) = 0.1.0 + 1.0.0 + 1.0.0 = 0$

Remarque : Dans l'interprétation ci-dessus, les formules $\forall x \exists y\ a(x,y)$ et $\exists y \forall x\ a(x,y)$ n'ont pas la même valeur. Donc en intervertissant un quantificateur existentiel et un quantificateur universel, on ne préserve pas le sens des formules.

Modèle, validité, conséquence, équivalence

Ces notions sont définies comme en *logique propositionnelle*.

Mais alors qu'en logique propositionnelle, une assignation est une application des variables propositionnelles dans $0, 1$, en logique du premier ordre une assignation est un couple constitué d'une interprétation des symboles d'une part et de l'état des variables d'autre part.

Notons que la valeur d'une formule ne dépend que de ses variables libres et de ses symboles, aussi pour évaluer une formule sans variable libre, l'état des variables est inutile et l'on utilise une interprétation au lieu d'une assignation.

Plan

Définition

Une signature est un ensemble de déclarations de symboles.

Soit Σ une signature :

1. le symbole s est **une constante** de la signature si et seulement si $s^{f0} \in \Sigma$
2. le symbole s est **un symbole de fonction à n arguments** (où $n > 0$) de la signature, si $s^{fn} \in \Sigma$
3. le symbole s est **une variable propositionnelle** de la signature si et seulement si $s^{r0} \in \Sigma$
4. le symbole s est **un symbole de relation à n arguments** (où $n > 0$) de la signature, si $s^{rn} \in \Sigma$

Exemples en mathématique (1/2)

0, 1, $+$ (à deux arguments), $*$ est une signature pour l'arithmétique.

Rappel : On omet de préciser la nature de ces symboles et le nombre de leurs arguments car il n'y a aucune ambiguité. On a uniquement dû préciser que le plus est utilisé avec deux arguments (car on peut rencontrer plus utilisé avec un seul argument).

Exemples en mathématique (2/2)

Une signature possible pour la théorie des ensembles est $\in, =$, car toutes les autres opérations sur les ensembles peuvent être définies à partir de ces deux symboles.

Surcharge

Un symbole est surchargé dans une signature, lorsque cette signature comporte deux déclarations distinctes du symbole.

Surcharge

Un symbole est surchargé dans une signature, lorsque cette signature comporte deux déclarations distinctes du symbole.

Exemple : il est fréquent d'utiliser des signatures dans lesquels le signe moins est surchargé car il est utilisé simultanément pour obtenir l'opposé d'un nombre ou faire la soustraction de deux nombres.

Surcharge

Un symbole est surchargé dans une signature, lorsque cette signature comporte deux déclarations distinctes du symbole.

Exemple : il est fréquent d'utiliser des signatures dans lesquels le signe moins est surchargé car il est utilisé simultanément pour obtenir l'opposé d'un nombre ou faire la soustraction de deux nombres.

Dans la suite de ce cours, nous nous interdirons d'utiliser des signatures comportant des symboles surchargés. Celà permet de simplifier les notations, car une fois qu'on a précisé la signature utilisée, on peut remplacer une déclaration de symbole par le symbole lui-même.

Exemple : signature et interprétation

La signature correspondant à l'exemple précédent est défini comme suit :

- les constantes *anne*, *bernard* et *claude*
- le symbole de relation *a* à deux arguments
- le symbole de fonction *c* à un argument

Exemple : signature et interprétation

La signature correspondant à l'exemple précédent est défini comme suit :

- les constantes *anne*, *bernard* et *claude*
- le symbole de relation *a* à deux arguments
- le symbole de fonction *c* à un argument

L'interprétation d'une signature est une interprétation qui définit seulement le sens des éléments de la signature.

Exemple : signature et interprétation

La signature correspondant à l'exemple précédent est défini comme suit :

- les constantes *anne*, *bernard* et *claude*
- le symbole de relation *a* à deux arguments
- le symbole de fonction *c* à un argument

L'interprétation d'une signature est une interprétation qui définit seulement le sens des éléments de la signature.

Exemple : Pour définir l'interprétation *I*, on indique le domaine $\{0, 1, 2\}$ et le sens que *I* donne aux symboles de la signature en identifiant les symboles, leurs déclarations dans la signature et leurs valeurs :

- $anne = 0, bernard = 1, claude = 2$
- $a = \{(0, 1), (1, 0), (2, 0)\}$
- $c(0) = 1, c(1) = 0, c(2) = 2$

Terminologie

Soit Σ une signature.

- Un terme sur cette signature est soit **une variable**, soit **une constante** s où $s^{f0} \in \Sigma$, soit **une fonction** de la forme $s(t_1, \dots t_n)$ où $n \geq 1$, $s^{fn} \in \Sigma$ et où $t_1, \dots t_n$ sont des termes sur cette signature.
- Une formule atomique sur cette signature est soit **une des constantes** $\top, \bot$, soit **une variable propositionnelle** s où $s^{r0} \in \Sigma$, soit **une relation** de la forme $s(t_1, \dots t_n)$ où $n \geq 1$, $s^{rn} \in \Sigma$ et où $t_1, \dots t_n$ sont des termes sur cette signature.
- Une formule sur cette signature est une formule, dont les sous-formules atomiques sont sur cette signature.

Dans la suite, T_Σ est l'ensemble des termes sur la signature Σ et F_Σ est l'ensemble des formules sur la signature Σ.

Terminologie

Soit Σ une signature.

- Un terme sur cette signature est soit **une variable**, soit **une constante** s où $s^{f0} \in \Sigma$, soit **une fonction** de la forme $s(t_1, \ldots t_n)$ où $n \geq 1$, $s^{fn} \in \Sigma$ et où $t_1, \ldots t_n$ sont des termes sur cette signature.
- Une formule atomique sur cette signature est soit **une des constantes** $\top, \bot$, soit **une variable propositionnelle** s où $s^{r0} \in \Sigma$, soit **une relation** de la forme $s(t_1, \ldots t_n)$ où $n \geq 1$, $s^{rn} \in \Sigma$ et où $t_1, \ldots t_n$ sont des termes sur cette signature.
- Une formule sur cette signature est une formule, dont les sous-formules atomiques sont sur cette signature.

Dans la suite, T_Σ est l'ensemble des termes sur la signature Σ et F_Σ est l'ensemble des formules sur la signature Σ.

Exemple : $\forall x(p(x) \Rightarrow \exists y q(x, y))$ est une formule sur la signature $p^{r1}, q^{r2}, h^{f1}, c^{f0}$.

Terminologie

Soit Σ une signature.

- Un terme sur cette signature est soit **une variable**, soit **une constante** s où $s^{f0} \in \Sigma$, soit **une fonction** de la forme $s(t_1, \dots t_n)$ où $n \geq 1$, $s^{fn} \in \Sigma$ et où $t_1, \dots t_n$ sont des termes sur cette signature.
- Une formule atomique sur cette signature est soit **une des constantes** $\top, \bot$, soit **une variable propositionnelle** s où $s^{r0} \in \Sigma$, soit **une relation** de la forme $s(t_1, \dots t_n)$ où $n \geq 1$, $s^{rn} \in \Sigma$ et où $t_1, \dots t_n$ sont des termes sur cette signature.
- Une formule sur cette signature est une formule, dont les sous-formules atomiques sont sur cette signature.

Dans la suite, T_Σ est l'ensemble des termes sur la signature Σ et F_Σ est l'ensemble des formules sur la signature Σ.

Exemple : $\forall x(p(x) \Rightarrow \exists y q(x, y))$ est une formule sur la signature $p^{r1}, q^{r2}, h^{f1}, c^{f0}$.
Mais c'est aussi une formule sur la signature p^{r1}, q^{r2}.

Signature associée

La signature associée à une formule est la plus petite signature Σ telle que la formule est élément de F_Σ, c'est donc la plus petite signature permettant d'écrire la formule.

Signature associée

La signature associée à une formule est la plus petite signature Σ telle que la formule est élément de F_{Σ}, c'est donc la plus petite signature permettant d'écrire la formule.

Exemple : la signature associée à la formule $\forall x(p(x) \Rightarrow \exists y q(x,y))$ est p^{r1}, q^{r2}.

Signature associée

La signature associée à une formule est la plus petite signature Σ telle que la formule est élément de F_Σ, c'est donc la plus petite signature permettant d'écrire la formule.

Exemple : la signature associée à la formule $\forall x(p(x) \Rightarrow \exists y q(x, y))$ est p^{r1}, q^{r2}.

La signature associée à un ensemble de formules est l'union des signatures associées à chaque formule de l'ensemble.

Signature associée

La signature associée à une formule est la plus petite signature Σ telle que la formule est élément de F_Σ, c'est donc la plus petite signature permettant d'écrire la formule.

Exemple : la signature associée à la formule $\forall x(p(x) \Rightarrow \exists y q(x,y))$ est p^{r1}, q^{r2}.

La signature associée à un ensemble de formules est l'union des signatures associées à chaque formule de l'ensemble.

Exemple : la signature associée à l'ensemble des deux formules $\forall x(p(x) \Rightarrow \exists y q(x,y)), \forall n \forall p(n+s(p) = s(n+p)$ est $p^{r1}, q^{r2}, +^{f2}, s^{f1}, =^{r2}$.

Signature associée

La signature associée à une formule est la plus petite signature Σ telle que la formule est élément de F_Σ, c'est donc la plus petite signature permettant d'écrire la formule.

Exemple : la signature associée à la formule $\forall x(p(x) \Rightarrow \exists y q(x,y))$ est p^{r1}, q^{r2}.

La signature associée à un ensemble de formules est l'union des signatures associées à chaque formule de l'ensemble.

Exemple : la signature associée à l'ensemble des deux formules $\forall x(p(x) \Rightarrow \exists y q(x,y)), \forall n \forall p(n+s(p) = s(n+p)$ est $p^{r1}, q^{r2}, +^{f2}, s^{f1}, =^{r2}$.

L'interprétation d'un ensemble de formules est une interprétation qui définit seulement le sens de **la signature associée** à l'ensemble des formules.

Plan

Définition

Soit x une variable, t un terme, A une formule.

Définition

Soit x une variable, t un terme, A une formule.

1. $A < x := t >$ est la formule obtenue en remplaçant dans la formule A toute occurrence libre de x par le terme t.

Définition

Soit x une variable, t un terme, A une formule.

1. $A < x := t >$ est la formule obtenue en remplaçant dans la formule A toute occurrence libre de x par le terme t.

   Exemple : soit A la formule $(\forall x P(x)) \vee Q(\underline{x})$.
   $A < x := b >$ est la formule $(\forall x P(x)) \vee Q(b)$ car seule l'occurrence soulignée de x est libre.

Définition

Soit x une variable, t un terme, A une formule.

1. $A < x := t >$ est la formule obtenue en remplaçant dans la formule A toute occurrence libre de x par le terme t.

   Exemple : soit A la formule $(\forall x P(x)) \vee Q(\underline{x})$.
   $A < x := b >$ est la formule $(\forall x P(x)) \vee Q(b)$ car seule l'occurrence soulignée de x est libre.

2. Le terme t est libre pour x dans A, si les variables de t ne sont pas liées dans les occurrences libres de x.

Définition

Soit x une variable, t un terme, A une formule.

1. $A < x := t >$ est la formule obtenue en remplaçant dans la formule A toute occurrence libre de x par le terme t.

   Exemple : soit A la formule $(\forall x P(x)) \vee Q(\underline{x})$.
   $A < x := b >$ est la formule $(\forall x P(x)) \vee Q(b)$ car seule l'occurrence soulignée de x est libre.

2. Le terme t est libre pour x dans A, si les variables de t ne sont pas liées dans les occurrences libres de x.

   Exemple : le terme z **est libre** pour x dans la formule $\exists y p(x, y)$. Par contre, comme tout terme de cette formule comportant la variable y n'est pas libre pour x, le terme y **n'est pas libre** pour x dans cette formule.

Propriétés

théorème

Soit A une formule et t un terme libre pour la variable x dans A . Soit I une interprétation et e un état de l'interprétation. Nous avons :
$[A < x := t >]_{Ie} = [A]_{Ie[x=d]}$ où $d = [[t]]_{Ie}$.
Autrement dit, la valeur de $A < x := t >$ dans une assignation est la même que celle de A dans une assignation identique, sauf qu'elle donne à x la valeur du terme t.

Propriétés

théorème

Soit A une formule et t un terme libre pour la variable x dans A . Soit I une interprétation et e un état de l'interprétation. Nous avons :
$[A < x := t >]_{Ie} = [A]_{Ie[x=d]}$ où $d = [[t]]_{Ie}$.
Autrement dit, la valeur de $A < x := t >$ dans une assignation est la même que celle de A dans une assignation identique, sauf qu'elle donne à x la valeur du terme t.

corollaire

Soit A une formule et t un terme libre pour x dans A.
Les formules $\forall xA \Rightarrow A < x := t >$ et $A < x := t > \Rightarrow \exists xA$ sont valides.

La condition sur *t* est nécessaire

Nous allons maintenant montrer que le fait que t soit un terme libre est nécéssaire dans **le théorème**.

La condition sur t est nécessaire

Nous allons maintenant montrer que le fait que t soit un terme libre est nécéssaire dans **le théorème**.

Soit I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ avec $p_I = \{(0, 1)\}$ et soit e, l'état $y = 0$.

La condition sur t est nécessaire

Nous allons maintenant montrer que le fait que t soit un terme libre est nécéssaire dans **le théorème**.

Soit I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ avec $p_I = \{(0, 1)\}$ et soit e, l'état $y = 0$.

Soit A la formule $\exists y p(x, y)$ et t le terme y. Ce terme n'est pas libre pour x dans A.

La condition sur t est nécessaire

Nous allons maintenant montrer que le fait que t soit un terme libre est nécéssaire dans **le théorème**.

Soit I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ avec $p_I = \{(0, 1)\}$ et soit e, l'état $y = 0$.

Soit A la formule $\exists yp(x, y)$ et t le terme y. Ce terme n'est pas libre pour x dans A.

Dans l'assignation Ie on a :
$A < x := t >= \exists yp(y, y) = p(0, 0) + p(1, 1) = 0.$

La condition sur t est nécessaire

Nous allons maintenant montrer que le fait que t soit un terme libre est nécéssaire dans **le théorème**.

Soit I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ avec $p_I = \{(0, 1)\}$ et soit e, l'état $y = 0$.

Soit A la formule $\exists yp(x, y)$ et t le terme y. Ce terme n'est pas libre pour x dans A.

Dans l'assignation Ie on a :
$A < x := t >= \exists yp(y, y) = p(0, 0) + p(1, 1) = 0$.

Soit $d = [[t]]_{Ie} = [[y]]_{Ie} = 0$. Dans l'assignation $Ie[x = d]$, on a $x = 0$.
Donc dans l'assignation $Ie[x = d]$, on a :
$A = \exists yp(0, y) = p(0, 0) + p(0, 1) = 1$.

La condition sur t est nécessaire

Nous allons maintenant montrer que le fait que t soit un terme libre est nécéssaire dans **le théorème**.

Soit I l'interprétation de domaine $\{0,1\}$ avec $p_I = \{(0,1)\}$ et soit e, l'état $y = 0$.

Soit A la formule $\exists y p(x,y)$ et t le terme y. Ce terme n'est pas libre pour x dans A.

Dans l'assignation Ie on a :
$A < x := t >= \exists y p(y,y) = p(0,0) + p(1,1) = 0$.

Soit $d = [[t]]_{Ie} = [[y]]_{Ie} = 0$. Dans l'assignation $Ie[x = d]$, on a $x = 0$.
Donc dans l'assignation $Ie[x = d]$, on a :
$A = \exists y p(0,y) = p(0,0) + p(0,1) = 1$.

Ainsi $[A < x := t >]_{Ie} = 0 \neq [A]_{Ie[x=d]} = 1$ où $d = [[t]]_{Ie}$.