Inf242 : épreuve de contrôle continu

Michel Lévy

7 avril 2009

Durée : 2h
Conditions : une feuille RV format A4
Remarque : on peut utiliser indifféremment les notations logiques et booléennes
Barème *indicatif* :

exercice	barème
1	2
2	6
3	2
4	3
5	4
6	3
7	3

Le barème est sur 23, mais la note maximum sera 20.

1 Table de vérité

Exercice 1 (2 points, table de vérité) Compléter *la table de vérité* sur votre copie *:*

a	b	c	$a \vee b \Rightarrow c$	$(\neg a \wedge \neg b) \vee c$	$(a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)$	$(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)$	$(a \vee b \Rightarrow c) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c))$
0	*0*	*0*					
0	*0*	*1*					
0	*1*	*0*					
0	*1*	*1*					
1	*0*	*0*					
1	*0*	*1*					
1	*1*	*0*					
1	*1*	*1*					

Donnez un contre-modèle de $(a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)$.
S'il y a une formule valide, indiquez-là.
Parmi les formules ci-dessus, y-en-t-il une qui soit insatisfaisable ?
Indiquez toutes les formules équivalentes à $a \vee b \Rightarrow c$*.*

Réponse

□

2 Raisonnements corrects ou incorrects

Exercice 2 (6 points décomposés en 2, 2, 2) *On présente trois raisonnements qu'il faut formaliser (en logique propositionnelle) et dont il faut indiquer,* s'ils sont corrects ou incorrects. *Pour chaque raisonnement, on impose la méthode à utiliser.*

1. *Les hypothèses du premier raisonnement sont :*
   Si Alice est élue présidente alors Betty est élue vice-présidente ou Carole est élue trésorière
   Betty est élue vice-précidente.
   La conclusion est : Si Alice est élue présidente alors Carole n'est pas élue trésorière
   Dans la formalisation, on posera :
   a= Alice est élue présidente
   b = Betty est élue vice-présidente
   c = Carole est élue trésorière
   Transformer la conjonction des hypothèses et de la négation de la conclusion en une somme de monômes. Donner les étapes de cette transformation.
   Conclure sur la correction du raisonnement.
2. *Les hypothèses du deuxième raisonnement sont :*
   Si Alice est élue présidente alors Betty est élue vice-présidente ou Carole est élue trésorière
   Carole n'est pas élue trésorière.
   La conclusion est : Si Betty n'est pas élue vice-présidente alors Alice n'est pas élue présidente.
   Transformer la conjonction des hypothèses et de la négation de la conclusion en une somme de monômes. Donner les étapes de cette transformation.
   Conclure sur la correction du raisonnement.
3. *Les hypothèses du troisième raisonnement sont :*
   Un but est valide si et seulement si le ballon franchit la ligne et aucune faute n'a été commise
   Le ballon a franchi la ligne
   Un joueur est en faute s'il est hors-jeu ou s'il touche le ballon de la main
   Si un joueur est placé derrière le dernier défenseur, il est en position de hors jeu
   Un joueur était placé derrière le dernier défenseur
   La conclusion est : Le but n'est pas valide.
   Dans la formalisation, on posera :
   b = Un but est valide
   l = Le ballon a franchi la ligne
   f = Une faute a été commise
   m = Un joueur a touché le ballon de la main
   h = Un joueur était en position hors-jeu
   d = Un joueur était placé derrière le dernier défenseur
   Transformer en clauses la conjonction des hypothèses et de la négation de la conclusion. Appliquer l'algorithme de Davis et Putnam.
   Conclure sur la correction du raisonnement.

Réponse

□

3 Trouver une preuve par résolution

Exercice 3 (2 points) *Prouver, grâce à une preuve par résolution, que le produit de clauses ci-dessous est insatisfaisable :*
$(p+q+r)(\overline{q}+r)(\overline{r}+s)(p+\overline{s})(\overline{p})(q+\overline{r})$

Réponse □

4 Utiliser Davis et Putnam

Exercice 4 (3 points) *Soit E le produit de clauses :*
$(\bar{p}+q+\bar{s})(p+r)(\bar{q}+s)(r+q+s)(\bar{r}+q+\bar{s})(p+\bar{r}+q+s)(\bar{q}+\bar{s})$
Utiliser l'algorithme de Davis et Putnam pour décider si E est ou n'est pas satisfaisable.
Donner une trace de l'algorithme (suivant les conventions du polycopié). Indiquer la réponse de l'algorithme (E satisfaisable ou insatisfaisable). Si E est satisfaisable, déduire un modèle de E à partir de la trace de l'exécution de l'algorithme .

Réponse

□

5 Déduction naturelle

Exercice 5 (4 points) *Donnez les preuves en déduction naturelle avec le formalisme du cours INF242 pour les formules suivantes :*

1. $a \wedge \neg b \Rightarrow \neg(a \Rightarrow b)$
2. $\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow a$
   Attention la preuve exige l'usage de la réduction à l'absurde

Réponse □

6 Récurrences simples

Exercice 6 (3 points, résolution et récurrence) *Soient a_i des variables où $0 \leq i \leq n$. Soient l'ensemble de clauses $\{\overline{a_i} + a_{i+1} \mid 0 \leq i \leq n-1\}, a_0, \overline{a_n}$.*

1. *Lorsque $n = 2$, donner une preuve par resolution de ce que cet ensemble de clauses est contradictoire.*
2. *Montrez, pour n quelconque, qu'il existe une preuve par résolution de ce que cet ensemble de clauses est contradictoire.*

Réponse

□

Exercice 7 (3 points, transformation en somme de monômes et récurrence) *Soient x_i et y_i des variables pour i de 1 à n.*

1. *Combien de monômes obtient-on en transformant $(x_1+y_1)(x_2+y_2)$ en une somme de monômes.*
2. *Combien de monômes obtient-on en transformant $(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3)$ en une somme de monômes.*
3. *Indiquez combien de monômes, on obtient dans la transformation de $\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i)$ en une somme de monômes ? Justifier votre réponse par récurrence sur n.*

Réponse

□

7 Corrigés

Exercice 1, page 1

a	b	c	$a \vee b \Rightarrow c$	$\bar{a}\bar{b}+c$	$(a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)$	$(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)$	$(a \vee b \Rightarrow c) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c))$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$a = 1, b = 1, c = 0$ est l'unique contre-modèle de $(a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)$.
La formule $(a \vee b \Rightarrow c) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c))$ est valide.
Aucune des formules n'est insatisfaisable.
Les formules $\bar{a}\bar{b}+c$, $(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)$ sont équivalentes à $a \vee b \Rightarrow c$.

Exercice 2, page 2

1. Les hypothèses du raisonnement sont : $a \Rightarrow b \vee c$, b
   La conclusion est : $a \Rightarrow \neg c$.
   Soit $A = (a \Rightarrow b \vee c).b.\overline{a \Rightarrow \overline{c}}$ la conjonction des hypothèses et de la négation de la conclusion.
   Mettons A sous forme de somme de monômes.
   Par élimination de l'implication et déplacement des négations, on a :
   $A = (\overline{a} + b + c).b.a.c$
   Par distributivité et simplification :
   $A = a.b.c$
   Donc l'assignation $a = 1, b = 1, c = 1$ est modèle des hypothèses et pas de la conclusion : par suite le raisonnement est incorrect.
2. Les hypothèses du raisonnement sont : $a \Rightarrow b \vee c$, $\neg c$
   La conclusion est : $\neg b \Rightarrow \neg a$.
   Soit $A = (a \Rightarrow b + c).\overline{c}.\overline{\overline{b} \Rightarrow \overline{a}}$ la conjonction des hypothèses et de la négation de la conclusion.
   Mettons A sous forme de somme de monômes.
   Par déplacement des négations, on a :
   $A = (a \Rightarrow b + c).\overline{c}.\overline{b}.a$
   Par élimination de l'implication, on a :
   $A = (\overline{a} + b + c).\overline{c}.\overline{b}.a$
   Par distributivité, on obtient 0. Donc il n'y a pas de modèle des hypothèses qui rende faux la conclusion : le raisonnement est correct.
3. Avec les conventions indiquées, les hypothèses sont : $b \Leftrightarrow l \wedge \neg f$, l, $h \vee m \Rightarrow f$, $d \Rightarrow h$, d.

La conclusion est $\neg b$.
Soit $A = (b \Leftrightarrow l.\overline{f}).l.(h+m \Rightarrow f).(d \Rightarrow h).d.b$. Cette formule est, à la simplification près de $\neg\neg b$ en b, la conjonction des hypothèses et de la négation de la conclusion.
Transformons cette formule en un produit de clauses. On obtient :
$(\overline{b}+l).(\overline{b}+\overline{f}).(\overline{l}+f+b).l.(\overline{h}+f).(\overline{m}+f).(\overline{d}+h).d.b$
On peut maintenant appliquer l'algorithme de Davis et Putnam, dont on donne la trace :

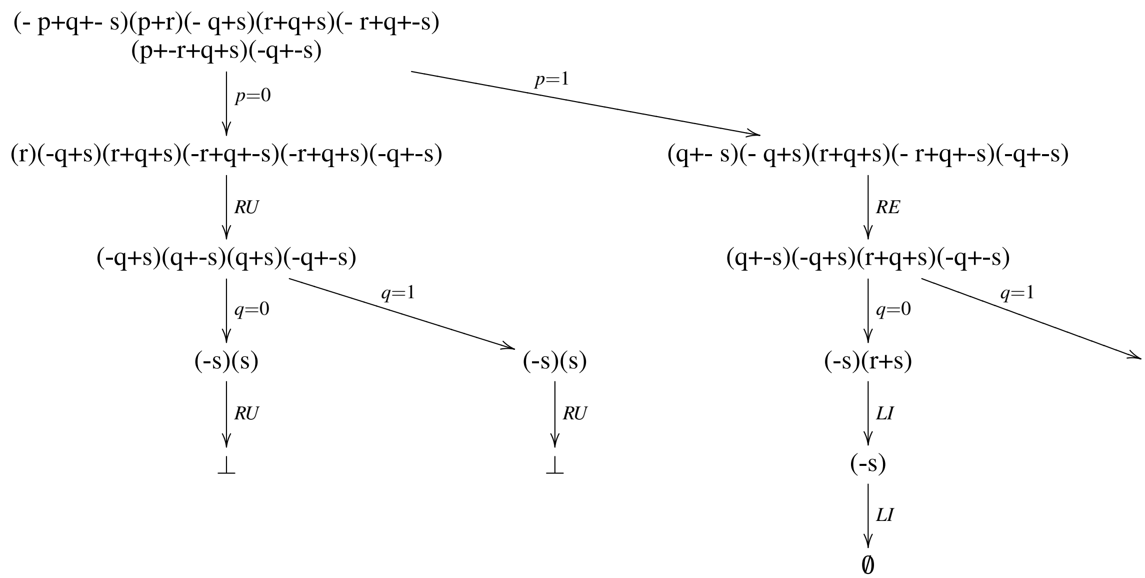
$$
\begin{array}{c}
(\overline{b}+l)(\overline{b}+\overline{f})(\overline{l}+f+b)(l)(\overline{h}+f)(\overline{m}+f)(\overline{d}+h)(d)(b) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle reduction} \\
(\overline{b}+l)(\overline{b}+\overline{f})(l)(\overline{h}+f)(\overline{m}+f)(\overline{d}+h)(d)(b) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle LI} \\
(\overline{b}+\overline{f})(\overline{h}+f)(\overline{d}+h)(d)(b) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle RU} \\
(\overline{f})(\overline{h}+f)(h) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle RU} \\
\perp
\end{array}
$$

Par suite A est insatisfaisable, donc le raisonnement est correct.

Exercice 3, page 3

1	$p+q+r$	hyp
2	$\overline{p}$	hyp
3	$q+r$	de 1,2
4	$\overline{q}+r$	hyp
5	r	de 3,4
6	$\overline{r}+s$	hyp
7	s	de 5, 6
8	$p+\overline{s}$	hyp
9	p	de 7, 8
10	$\perp$	de 2, 9

Exercice 4, page 3



D'après la trace ci-dessus, E est satisfaisable et en remontant la branche aboutissant à l'ensemble vide, on trouve le modèle suivant de E : $r = 1, s = 0, q = 0, p = 1$.

Exercice 5, page 3

1. preuve de $a \wedge \neg b \Rightarrow \neg(a \Rightarrow b)$

numero	preuve	justification
1	supposons $a \wedge \neg b$	
2	supposons $a \Rightarrow b$	
3	a	$\wedge$E1 1
4	b	$\Rightarrow$E 2, 3
5	$\neg b$	$\wedge$E2 1
6	$\perp$	$\Rightarrow$E 4, 5
7	donc $\neg(a \Rightarrow b)$	$\Rightarrow$I 2, 6
8	donc $a \wedge \neg b \Rightarrow \neg(a \Rightarrow b)$	$\Rightarrow$I 1,7

2. preuve de $\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow a$

numero	preuve	justification
1	supposons $\neg(a \Rightarrow b)$	
2	supposons $\neg a$	
3	supposons a	
4	$\perp$	$\Rightarrow$E 2, 3
5	b	Efq 4
6	donc $a \Rightarrow b$	$\Rightarrow$I 3, 5
7	$\perp$	$\Rightarrow$E 1, 6
8	donc $\neg\neg a$	$\Rightarrow$I 2, 7
9	a	RAA 8
10	donc $\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow a$	$\Rightarrow$I 1, 9

Pour obtenir les réponses, vous pouvez aussi utiliser `http://membres-liglab.imag.fr/michel.levy/prouveur_classique/index.php`

Exercice 6, page 3

Pour n = 2, on obtient la preuve suivante :

1	a_0	hyp
2	$\overline{a_0} + a_1$	hyp
3	a_1	de 1,2
4	$\overline{a_1} + a_2$	hyp
5	a_2	de 3,4
6	$\overline{a_2}$	hyp
7	$\perp$	de 2, 9

Soit $P(n)$ la propriété : $\{\overline{a_i} + a_{i+1} \mid 0 \leq i \leq n-1\}, a_0 \vdash a_n$.
$P(0)$ est vraie, car $a_0 \vdash a_0$.
Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.
Par résolution, on a : $a_n, \overline{a_n} + a_{n+1} \vdash +a_{n+1}$.
D'après $P(n)$ et la propriété de combinaison des preuves, $P(n+1)$ est donc vraie.
Par résolution, on a : $a_n, \overline{a_n} \vdash \perp$.
En appliquant la propriété de combinaison des preuves à $P(n)$ et à la preuve ci-dessus, on obtient :
$\{\overline{a_i} + a_{i+1} \mid 0 \leq i \leq n-1\}, a_0, \overline{a_n} \vdash \perp$.

Exercice 7, page 4

Les exemples montrent que pour $n = 2$ et $n = 3$, on obtient respectectivement 4 et 8 monômes. On conjecture que la transformation de $\prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i)$ en une somme de monômes, donne 2^n monômes.
Developpons le produit$\prod_{i=1}^{n+1}(x_i + y_i)$.
Par hypothèse de récurrence $\prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i)$ est transformé en une somme de 2^n monomes $\sum_{i=1}^{2^n} m_i$.
Par distributivité sur cette somme de $x_{n+1} + y_{n+1}$, on obtient la somme de monômes : $\sum_{i=1}^{2^n} m_i x_{n+1} + \sum_{i=1}^{2^n} m_i y_{n+1}$.
Puisque cette somme comporte 2^{n+1} monômes, la propriété est vérifiée.